Зимски семестар 2023/2024 Вежбе из Математике 3
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Математика 3

1.1 Парцијалне диференцијалне једначине

1.2 Парцијалне диференцијалне једначине 2. реда

1. Одредити тип парцијалне диференцијалне једначине $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} - \cos x u_y = 0$ и свести је на канонски облик.

Решење. Дата једначина је хиперболичног типа, а канонски облик је $y_{\xi\eta} = 0$

2. Одредити тип парцијалне диференцијалне једначине $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} - 2yu_x = 0$ и свести је на канонски облик.

Решење. Дата једначина је параболичног типа, а канонски облик је $u_{\eta\eta} + 2(\frac{\xi}{\eta})^2 u_\xi = 0$.

3. Одредити тип парцијалне диференцијалне једначине $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0$ и свести је на канонски облик.

Решење. Дата једначина је елиптичног типа, а канонски облик је $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{u_\xi}{\xi+\eta} + \frac{u_\eta}{2\eta} = 0$.

4. Одредити области у којима је једначина $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$ хиперболичног, параболичног и елиптичног типа и у сва три случаја написати формуле трансформације за свођење на канонски облик.

Решење.

5. Наћи опште решење следећих парцијалних диференцијалних једначина:
а) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 2(x + e^y)$,
б) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$.

Решење.

6. Датом сменом наћи опште решење следећих парцијалних диференцијалних једначина: а) $\frac{\delta(x^2 u_x)}{\delta x} = x^2 u_{yy}$, $v(x,y) = xu(x,y)$,
б) $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$, $v(x,y) = (x-y)u(x,y)$.

Решење.

7. Решити Кошијев проблем:
$4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + u_y + \frac{u}{4} = 0$,
$u|_{y=0} = x^2 e^{-\frac{x}{4}}$, $u_y|_{y=0} = 0$.

Решење.

8. Решити следеће Гурсаове проблеме:
а) $2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0$, $|x| < y$,
$u|_{y=x} = 1$, $u|_{y=-x} = (1+x)e^x$,
б) $y^2 u_{xx} + u_{xy} = 0$, $y^3 - 8 < 3x < y^3$, $0 < y < 2$,
$u|_{y=2} = 3x + 8$, $u|_{3x=y^2} = 2y^3$.

Решење.

Мешовити проблем хомогене таласне једначине на правој са хомогеним граничним условима

Проблем: У области $D = (0,l) \times (0,\infty)$ одредити нетривијално класично ресење $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ хомогене таласне једначине

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x,t \in D$$

која задовољава хомогене граничне услове

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0,$$

и почетне услове

$$u(x,0) = \varphi_0(x),\ u'_t(x,0) = \varphi_1(x),\ x \in (0,l).$$

Посматрани проблем се решава Фуријеовом методом раздвајања променљивих:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= X(x)T(t),\ x \in [0,l],\ t \geqslant 0,\\
X(x)T''(t) &= a^2X''(x)T(t),\\
\frac{T''(t)}{a^2T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,\ \lambda = const,\ X(0) = X(l) = 0.
\end{aligned}$$

што се своди на решавање регуларног Штурм-Лиувиловог проблема

$$\begin{aligned}
X''(x) + \lambda X(x) = 0,\\
X(0) = X(l) = 0,
\end{aligned}$$

и решавање обичне диференцијалне једначине

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

Интерпретација проблема: Жица дужине l слободно осцилује, $u(x,0) = \varphi_0(x)$ даје положај жице у тренутку $t = 0$, $u'_t(x,o) = \varphi_1(x)$ је почетна брзина осциловања жице. Жица је учвр7ћена на крајевима: $u(0,t) = u(l,t) = 0 \ \ t > 0$.

Решимо разматрани Штурм-Лиувилов проблем:

$$\begin{aligned}
X''(x) + \lambda X(x) &= 0,\ X(0) = X(l) = 0\\
X(x) &= C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x,\ X(0) = X(l) = 0,\\
C_2 &\neq 0, \sin\sqrt{\lambda}l = 0,\\
\lambda_k &= (\frac{k\pi}{l})^2,\\
X_k(x) &= \sin\sqrt{\lambda_k}x = \sin\frac{k\pi x}{l}.
\end{aligned}$$

Решимо разматрану обичну диференцијалну једначину:

$$\begin{aligned}
T''_k(t) + a^2(\frac{k\pi}{l})^2T_k(t) = 0,\\
T_k(t) = C_k \cos\frac{ak\pi t}{l} + D_k \sin\frac{ak\pi t}{l}.
\end{aligned}$$

Решење полазног проблема је облика $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$, $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$, $k \geqslant 1$.

1. Одредити закон осциловањажице дужине l, учвр71ене на крајевима, која је у пресецима удаљеним за $\frac{l}{3}$ од крајњих тачака изведена из равнотежног положаја за амплитуду x_0, тако даје средишњи део паралелан њеном равнотежном положају, па потом пуштена да осцилује без почетне брзине.