1 час, Диференцијалне једначине првог реда у симетричном облику

Нека су у једноструко повезаној области D функције P'_x и Q'_t непрекидне. Следећа два услова су еквивалентна:
1.$P'_x = Q'_t$ за све $(t, x) \in D$,
2.$Pdt + Qdx$ је тотални диференцијал у D.

$F(t, x) = \int Pdt + \int [Q(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \int P(t, x)dt]dx.$

1. Решити ДЈ $x(y^2 + 1)dx + (x^2y + 2y^3)dy = 0.$

$x^2y^2 + x^2 + y^4 = C.$

2. Решити ДЈ $y' \cos y + x \sin y \cos^2 y - \sin^3 y = 0.$

$\frac{1}{\sin^2 y} = 1 + Ce^{x^2} - 2e^{x^2} \int e^{-x^2} dx$, $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Решити ДЈ $y' \tan y + 4x^3 \cos^3 y = 2x.$

$\frac{1}{\cos^3 y} = Ce^{-3x^2} + 2x^2 - \frac{2}{3}.$

4. Решити ДЈ $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0.$

$x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} = C.$

Функцију $\mu = \mu(t, x)$ дефинисану, непрекидну и различиту од 0 у једноструко повезаној области D називамо интеграционим фактором једначине $Pdt + Qdx$ ако је $\mu Pdt + \mu Qdx$ једначина са тоталним диференцијалом. Ако се интеграциони фактор може изразити помоћу функције $\mu = \mu(\omega)$, тада из $(\mu P)'_x = (\mu Q)'_t$ добијамо $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_x - Q'_t}{\omega'_t Q - \omega'_x P} d\omega$. 5. Одредити интеграциони фактор:
1. ДЈ која раздваја променљиве,
2. линеарне ДЈ.

ДЈ $y' = f(x)g(y)$ има интеграциони фактор $\mu = \frac{1}{g(y)}$ јер помножена са њим постаје ДЈ са тоталним диференцијалом. Из $\frac{1}{\mu} = 0$ се добијају евентуална сингуларна решења. Линеарна ДЈ има интеграциони фактор $e^{\int p(x)dx}$.

6. Решити ДЈ $x(1 + xy^2)y' = y(2 - 3xy^2)$ и одредити решење које пролази кроз $(-2, 0)$.

$$y(2x-3xy^2)dx - x(1+xy^2)dy = 0,$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{3-7xy^2}{-x(1+xy^2)\frac{\partial\omega}{\partial x} - y(2-3xy^2)\frac{\partial\omega}{\partial y}},$$

$$\omega = \alpha \ln|x| + \beta \ln|y|,$$

$$\frac{x^2 - x^3y^2}{y} = C,$$

$$y = 0, x < 0.$$

7. Решити ДЈ $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})dy = 0$.

$x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}} = C$.

8. Решити ДЈ $(\sqrt{x^2-y} + 2x)dx - dy = 0$ ако је познато да има $\mu = \mu(x^2-y)$.

$x + 2\sqrt{x^2-y} = C$.

9. Решити ДЈ

$$(x^2+y^2+1)dx - 2xydy = 0.$$

10. Решити ДЈ

$$(3xy^3 - 4xy + y)y' + y^2(y^2-2) = 0.$$