Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Математике 3б и 3ц
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Шеста недеља

1.1 Дарбуова, Рикатијева ДЈ и ДЈ са тоталним диференцијалом

Дарбуова ДЈ је ДЈ $M(x,y)dx + N(x,y)dy + P(x,y)(xdy - ydx) = 0$, где су M и N хомогенитета α, а P хомогенитета β. Ако је $\beta - \alpha + 2 \neq 0$ или $\beta - \alpha + 1 \neq 0$, једначина се сменом $y = xz$ своди на Бернулијеву ДЈ и добија се ДЈ $(M(1,z) + zN(1,z))dx + N(1,z)xdz + P(1,z)x^{\beta-\alpha+2}dz = 0$. Посебно треба испитати да ли су $y = z_0 x$, $x < 0$ и $y = z_0 x$, $x > 0$ решења (овде је $M(1,z_0) + z_0 N(1,z_0) = 0$). Ако је $\beta - \alpha + 2 = 0$ једначина је линеарна, а ако је $\beta - \alpha + 1 = 0$ хомогена.

1. Одредити опште решење $(x^2 - y^2)dx + xydy + kyx^{m+1}(xdy - ydx) = 0$.

Решење. Једначина је Дарбуова, при чему су M и N хомогенитета 2, а P хомогенитета $m+2$. Сменом $xy = z$ се добија $(1 - z^2 + z^2)dx + zxdz + kzx^{m+2}dz = 0$, односно $x' + zx = -kzx^{m+2}$. Ако је $m + 2 \neq 2$ и $m + 2 \neq 1$ добија се Бернулијева ДЈ која се решава сменом $x^{-(m+1)} = v$. Лако се добија $v' - zv(m+1) = k(m+1)z$ одакле имамо $v = -k + Ce^{\frac{m+1}{2}z^2}$, односно $x^{-(m+1)} = Ce^{\frac{m+1}{2}\frac{y^2}{x^2}} - k$. Ако је $m + 2 = 1$, добија се хомогена линеарна ДЈ $x' + zx = -kzx$, односно $x' + (k+1)zx = 0$, чије решење је $x = Ce^{-\frac{(k+1)y^2}{2x^2}}$. Ако је $m + 2 = 0$, имамо ДЈ $x' + (k+x)z = 0$, одакле је $x = Ce^{-\frac{y^2}{2x^2}} - k$.

Рикатијева ДЈ је ДЈ облика $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$, где су $p, q, r \in C(a,b)$. ДЈ нема сингуларних рехења, а област егзистенције и јединствености решења је $(a,b) \times (-\infty, \infty)$. Постоји неколико подтипова које ћемо решавати: 1) $y' = f(x)(ay^2 + by + c)$,
2) $y' = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x}y + c$,
3) $y' = \frac{a}{x}y^2 + \frac{1}{2x}y + c$, која се решава сменом $y = \sqrt{x}z$,
4) $y' = ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2}$, која се решава сменом $xy = z$.
Ако је познато партикуларно решење φ_1 Рикатијеве једначине, опште решење је облика $y = \varphi_1(x) + \frac{1}{z}$.

2. Урадити задатке 57 и 86 из збирке Ј. Кнежевић-Миљановић.

Решење. Збирка Диференцијалне једначине 1, Задаци са елементима теорије: Ако су позната два партикуларна решења Рикатијеве ДЈ $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2$, опште решење је облика $\frac{y(x)-\varphi_1(x)}{y(x)-\varphi_2(x)} = Ce^{\int p(x)(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))dx}$, а ако су позната три партикуларна решења $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, опште решење је $\frac{y(x)-\varphi_2(x)}{y(x)-\varphi_1(x)} : \frac{\varphi_3(x)-\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)-\varphi_1(x)} = C_1$.

3. Решити $x^2y' + x^2y^2 + xy = 4$, ако је познато да су партикуларна решења облика $f(x)$ и $f(-x)$.

Решење.

$$x^2f'(x) + x^2f^2(x) + xf(x) = 4,$$
$$-x^2f'(-x) + x^2f(-x) + xf(x) = 4.$$

Сменом $-x$ у другу једначину, добија се

$$-x^2f'(x) + x^2f^2(x) - xf(x) = 4.$$

Сабирањем прве и последње једначине се добија

$$x^2f^2(x) = 4,$$

односно $f(x) = \pm\frac{2}{x}$. Решење се налази из претходног задатка,

$$\frac{y - \frac{2}{x}}{y + \frac{2}{x}} = Ce^{-\int \frac{4}{x}dx} = \frac{C}{x^4}.$$

$x = 0$ је партикуларно решење које се добија за $C = 0$.

4. Решити $y' + y^2 + \frac{y}{x} - \frac{4}{x^2} = 0$.

Решење. Ово је подтип 4 и решава се сменом $xy = z$, $y' = \frac{z'x-z}{x^2}$. Добија се $z'x = 4 - z^2$, одакле следи $\left(\frac{z+2}{2-z}\right) = Cx^4$, односно $y = \frac{2Cx^4-2}{x+Cx^5}$.

ДЈ са тоталним диференцијалом је ДЈ облика $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, при чему су M, N дефинисане и непрекидне у $G \subset \mathbb{R}^2$.

Теорема. Нека су M, N, M'_y, N'_x дефинисане и непрекидне функције у G, при чему је $M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0$ за свако $(x,y) \in G$. Једначина $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ је једначина са тоталним диференцијалом акко $M'_y = N'_x$ за свако $(x,y) \in G$.

$$F'_x = M,$$

одакле се интеграцијом добија

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \varphi(y),$$

$$F'_y = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \varphi'(y) = N(x,y).$$

Како је $M'_y = N'_x$, имамо

$$\int_{x_0}^{x} N'_t(t,y)dt + \varphi'(y) = N(x,y),$$

одакле је $\varphi'(y) = N(x_0,y)$. Дакле,

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt + C,$$

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt + C.$$

5. Решити $x(y^2+1)dx + (x^2y+2y^3)dy = 0.$

Решење. Како је $M'_y = N'_x$, то је у питању ДЈ са тоталним диференцијалом. Узећемо $(x_0,y_0) = (0,0)$, па је $\int_0^{x_0} t(y^2+1)dt + \int_0^{y} 2t^3dt = C$, односно $x^2(y^2+1) + y^4 = C_1$, $C_1 > 0$.