Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Шеста недеља

1.1 Низови

1. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Решење. Постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да $m > a$. Стога,

$$0 < \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{m-1}\frac{a}{m}\cdots\frac{a}{n-1}\frac{a}{n} \leqslant \frac{a^m}{m!}(\frac{a}{m})^{n-m+1} \to 0, n \to \infty.$$

2. Доказати (за $a > 1$) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.

Решење. Запишимо $\frac{n^k}{a^n} = (\frac{n}{\sqrt[k]{a^n}})^k$ и уведимо смену $b = \sqrt[k]{a} > 1$. Како је на основу биномне формуле

$$0 < \frac{n}{b^n} = \frac{n}{(1+b-1)^n} \leqslant \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2} = \frac{2}{(b-1)^2}\frac{1}{n-1} \to 0, n \to \infty,$$

то је и

$$0 < (\frac{n}{b^n})^k \leqslant (\frac{2}{(b-1)^2}\frac{1}{n-1})^k \to 0, n \to \infty.$$

3. Доказати (за $a > 1$) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$.

Решење. Доказ по дефиницији. На основу претходног задатка, како је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^{\varepsilon n}} = 0$, за свако $\varepsilon > 0$ важи

$$\frac{1}{a^{\varepsilon n}} \leqslant \frac{n}{a^{\varepsilon n}} < 1,$$

одакле је

$$\log_a 1 \leqslant \log_a n < \log_a a^{\varepsilon n},$$
$$0 \leqslant \log_a n < \varepsilon n,$$
$$0 \leqslant \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon.$$

4. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

Решење. Приметимо да је $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$ за $n \geqslant 1$. На основу АГ неједнакости је

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdots \sqrt{n}\sqrt{n}} \leqslant \frac{1 + 1 + \cdots \sqrt{n} + \sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n-2}{n} \to 0 + 1 = 1, n \to \infty.$$

5. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{10}}$.

Решење. Применом теореме о три лимеса, уз кори71ење претходног задатка имамо

$$\sqrt[n]{1^{10}} \leqslant \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} k^{10}} \leqslant \sqrt[n]{n^{11}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} k^{10}} = 1.$$

6. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^n} = \max\{a_1, a_2, \ldots a_k\}$

Решење. Како је $a_i \leqslant \max\{a_1, a_2, \ldots a_k\}$ за $i = 1, \ldots k$, а максимум коначног скупа се достиже, то је

$$\max\{a_1, a_2, \ldots a_k\} \leqslant \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} a_i^n} \leqslant k^{\frac{1}{n}} \max\{a_1, a_2, \ldots a_k\}.$$

7. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + n^b}$, где су $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Решење. Размотримо следеће случајеве:
1) $a > 1$:

$$\sqrt[n]{a^n + n^b} = a\sqrt[n]{1 + \frac{n^b}{a^n}} \to a, n \to \infty.$$

2) $0 < a < 1$:

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} = \sqrt[n]{n}^b \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^b} + 1} \to 1, n \to \infty.$$

3) $a = 1$:

$$\sqrt[n]{1 + n^b} \to 1, n \to \infty.$$

8. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - \frac{1}{k^2})$.

Решење. Како је

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(k-1)\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}k^2},$$

померањем индекса у производима у бројиоцу и скраћивањем одговарајућих разломака, добија се

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n-1}{2n},$$

одакле пуштањем лимеса имамо

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{1}{2}.$$

9. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}})$.

Решење. Како је

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}) = \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+2)(k-1)}{k(k+1)},$$

померањем индекса и скраћивањем разломака се добија

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}.$$

10. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

Решење.

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)},$$

а важи идентитет $k^2-k+1=(k-1)^2+(k-1)+1$, то након померања индекса у производу и канцелације, имамо

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=\frac{2}{3}.$$