

# МАТЕМАТИКА 3 Б

## Писмени испит

Јануарски испитни рок

22. 1. 2020.

1. Функција  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  је дефинисана са  $f(x) = x^2$ .

(а) Развити у Фуријеов ред функцију  $f$  на скупу  $\mathbb{R}$  и одредити суму тог реда.

(б) Израчунати суме

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

(в) Израчунати интеграл

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x \cdot \ln x \, dx.$$

2. Функција  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  је дефинисана са

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^4}} \, dt.$$

Развити функцију  $f$  у степени ред и одредити полупречник конвергенције добијеног реда.

3. Дата је диференцијална једначина

$$y'''(x) + y''(x) - y'(x) + 15y(x) = \sin 2x.$$

(а) Одредити опште решење диференцијалне једначине.

(б) Да ли постоји периодично партикуларно решење диференцијалне једначине?

4. Решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{cases} x'(t) = 10x(t) + 3y(t) + 1 + 2\sin^2 t \\ y'(t) = -2x(t) + 5y(t) + \cos 2t \end{cases}$$

а потом одредити партикуларно решење које задовољава услове  $x(0) = y(0) = 0$ .

5. Дата је парцијална диференцијална једначина

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + (x - y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

(а) Одредити опште решење дате парцијалне диференцијалне једначине.

(б) Одредити партикуларно решење дате једначине које задовољава  $f(x, y, 1) = x - 2y$ .

(ц) Одредити партикуларно решење дате једначине које задовољава  $f(x, 2x, z) = x^2 + z^2$ .