

# МАТЕМАТИКА 3 Ц

## Писмени испит

Јунски испитни рок

20. 6. 2019.

1. У зависности од  $a \in \mathbb{R}$  испитати конвергенцију реда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{a+\frac{1}{k}}}.$$

2. Нека је  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  функција која за свако  $x \in \mathbb{R}$  задовољава диференцијалну једначину

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 2e^x.$$

(а) Нека је за свако  $x \in \mathbb{R}$  испуњено  $f'(x) > 0$ . Да ли можемо закључити да је за свако  $x \in \mathbb{R}$  испуњено  $f(x) > 0$ ?

(б) Нека је за свако  $x \in \mathbb{R}$  испуњено  $f(x) > 0$ . Да ли можемо закључити да је за свако  $x \in \mathbb{R}$  испуњено  $f'(x) > 0$ ?

3. Одредити суму реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$$

на његовом интервалу конвергенције а потом, користећи добијени резултат, сумирати ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}.$$

4. Нека је  $n \in \mathbb{N}$ . Решити Кошијев проблем

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \cdot Y(t), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix}_{n \times 1}.$$

5. Решити систем интегро-диференцијалних једначина

$$\phi_1''(x) - \phi_2(x) + \int_0^x (x-t)e^{x-t}\phi_2(t) dt = e^x,$$

$$\phi_2''(x) - \phi_1'(x) - \phi_2'(x) + \int_0^x \cos(x-t)\phi_1(t) dt = 1,$$

са почетним условима  $\phi_1(0) = 2$ ,  $\phi_1'(0) = 0$ ,  $\phi_2(0) = 1$  и  $\phi_2'(0) = -1$ .

**Напомена.** Време за израду задатака је 3 сата.