

# МАТЕМАТИКА 3 Б

## Писмени испит

Септембарски испитни рок

16. 9. 2020.

1. Нека је

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \ln 2 \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Израчунати суму реда  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

2. Нека је функција  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  дефинисана са  $f(x) = x^2$ .

(а) Развити у Фуријеов ред функцију  $f$  и одредити суму добијеног реда.

(б) Израчунати суме редова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

(в) Израчунати интеграл

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x \cdot \ln x \, dx.$$

3. За  $x > 0$  решити диференцијалну једначину

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 2x^2 + 3 \ln x + 2.$$

4. Решити Кошијев проблем

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot Y(t), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

5. Нека је дата парцијална диференцијална једначина

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

(а) Одредити опште решење дате једначине.

(б) Одредити партикуларно решење једначине које задовољава услове  $u(x, y) = x$  и  $y = 2x$ .