

# МАТЕМАТИКА 3 Б

## Писмени испит

Други септембарски испитни рок

26. 09. 2020.

1. Нека је дата функција

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } x \in [-2, 0), \\ \frac{x}{2}, & \text{ако је } x \in [0, 2). \end{cases}$$

(а) Развити функцију  $f$  у Фуријеов ред на скупу  $\mathbb{R}$  и одредити суму добијеног реда. Да ли парцијалне суме Фуријеовог реда функције  $f$  конвергирају равномерно на скупу  $[0, 10]$ ?

(б) Израчунати суме редова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n(n+1)}.$$

2. (а) На скуповима  $E_1 = (0, 1)$  и  $E_2 = (2020, +\infty)$  испитати равномерну конвергенцију функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 x^2}{x^4 + n^4} \arctg \sqrt{\frac{x}{n}}.$$

(б) Уз образложење поступка израчунати интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + e^x} dx.$$

3. Одредити решење диференцијалне једначине

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = \cos x - 3 \sin x$$

које додирује праву  $y = x + 1$  у тачки  $(0, 1)$ .

4. Нека су дате матрице

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$X'(t) = AX(t)B, \quad X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

5. Нека је дата парцијална диференцијална једначина

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

(а) Одредити опште решење дате једначине.

(б) Одредити партикуларно решење једначине које задовољава услове  $u(x, y) = x$  и  $y = 2x$ .