МАТЕМАТИКА 2 Б

Писмени испит

Септембарски испитни рок

16. 9. 2020.

1. Нека је за $n \in \mathbb{N}$ и за све бројеве $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ дата матрица

$$M_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}.$$

(а) Израчунати $\det M_n(a_1, \ldots, a_n)$.

(б) Одредити $M_3^{-1}(i, i, i)$.

(в) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице $M_2^2(1, 0)$.

2. Нека је дата тачка $A(3, 1, -4)$ и праве

$$(p) : \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad (q) : \begin{cases} -2x + z = 8 \\ 2x + y + z = 7. \end{cases}$$

Одредити једначину равни која садржи тачку A и која је паралелна са правама p и q.

3. (а) У елипсу $x^2 + 3y^2 = 12$ је уписан правоугаоник максималне површине чије су странице паралелне координатним осама. Одредити површину правоугаоника.

(б) У елипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ је уписан троугао површине P. Доказати да је

$$P \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4} ab.$$

Када се у овој неједнакости постиже знак једнакости?

4. Нека су дате површи $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ и $(S_2) : x^2 + y^2 + z = 4$. Израчунати интеграл

$$\oint\limits_{S_1 \cap S_2} z\,\mathbf{d}x + x\,\mathbf{d}y + y\,\mathbf{d}z.$$

Крива $S_1 \cap S_2$ је позитивно оријентисана посматрано из тачке $(0, 0, 4)$.