МАТЕМАТИКА 3 Ц
Писмени испит

Фебруарски испитни рок

11. 2. 2019.

Задатак 1. [5+10 поена]

(а) Нека је функција $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x) = x^2$. Одредити Фуријеов ред ове функције а потом користећи добијени Фуријеов ред функције f доказати да је

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(б) Доказати једнакост

$$\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\ \mathbf{d}x = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Задатак 2. [10 поена] Решити интегралну једначину

$$2^{-x} \cdot \Phi(x) = 1 - \int_0^x \frac{\Phi(t)}{2^{t-1}}\ \mathbf{d}t.$$

Задатак 3. [12 поена] У затвореном облику одредити решење Кошијевог проблема

$$\begin{cases} y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Задатак 4. [13 поена] Нека је $n \in \mathbb{N}$. Решити Кошијев проблем

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} \cdot Y(t), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix}_{n\times 1}.$$

Напомена. Време за рад износи 180 минута. Максималан број поена на писменом испиту је 50. Решења задатака детаљно образложити.