МАТЕМАТИКА 3 Ц
Први колоквијум

1.12.2018.

Задатак 1. [25 поена]

(а) Доказати да ред

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2-1}$$

конвергира за свако $x \geqslant 0$ и да дивергира за свако $x < 0$.

(б) Одредити интервал конвергенције а потом сумирати степени ред

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n^2-1)}.$$

Израчунати (ако постоји) суму реда

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}.$$

Задатак 2. [25 поена]

Израчунати

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x e^{-nx} \right) \mathbf{d}x.$$

Задатак 3. [25 поена]

Функцију $\mathcal{I} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ дефинисану са

$$\mathcal{I}(x) = \int_0^x t \ln \sqrt{\frac{t+1}{1-t}} \, \mathbf{d}t$$

развити у степени ред око $x = 0$. На ком интервалу је добијени степени ред конвергентан? Користећи добијени развој израчунати интеграл

$$\mathcal{I}(1) = \int_0^1 t \ln \sqrt{\frac{t+1}{1-t}} \, \mathbf{d}t.$$

Задатак 4. [25 поена]

(а) Разложити функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисану са

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$$

у Фуријеов ред на $[-\pi, \pi]$. Да ли је $T = 2\pi$ основни период функције f на $\mathbb{R}$?

(б) На основу Фуријеовог развоја функције f, доказати да је

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$