

МАТЕМАТИКА 2 Ц

Први колоквијум

8. мај 2019.

1. [30 поена]

(а) Одредити параметар $a \in \mathbb{C}$ тако да $0 \in \sigma(A)$, при чему је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

За тако одређени параметар a израчунати сопствене вредности и сопствене векторе матрице A^2 . Да ли матрица A^2 може да се дијагонализује?

(б) Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ матрица за коју важи $B^T = -B$. Доказати неједнакост $\text{tr}(B^2) \leq 0$. Када у овој неједнакости важи знак једнакости?

2. [20 поена] На правој

$$(p) : \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

одредити тачку C која је једнако удаљена од тачака $A(-1, -3, 1)$ и $B(3, 1, 1)$ а потом израчунати површину троугла $\triangle ABC$.

3. [25 поена] Доказати да функција $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, дефинисана са

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{ако је } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ако је } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

није диференцијабилна у $(0, 0)$ али да има извод у правцу ма ког вектора у тој тачки. Да ли је функција f непрекидна у тачки $(0, 0)$? По ком правцу и како се функција f локално најбрже мења, посматрано из тачке $(0, 0)$?

4. [25 поена] Дана је функција $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, дефинисана са

$$f(x, y) = -x^2y \cdot (x + y - 2).$$

Испитати локалне екстремне вредности функције f на \mathbb{R}^2 и одредити најмању и највећу вредност ове функције на троуглу чија темена имају координате $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ и $C(0, 2)$.

Напомена. Време за израду задатака је 3 сата. Приликом употребе одговарајућих теорема написати њихове исказе.