АНАЛИЗА 3 А
Писмени испит
М смер

Јануарски испитни рок

12. 01. 2023.

1. Нека је m мера Лебега на $\mathbb{R}$ и нека је на $[0,1]$ дат низ функција $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ са

$$f_n(x) = n\cdot\frac{x^{n-1}}{1+x} \quad \text{за свако} \quad x\in[0,1].$$

(а) [10] Израчунати граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathbf{d}x$.

(б) [5] Испитати конвергенцију низа $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у $L^1([0,1],m)$.

(в) [10] Испитати конвергенцију низа $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ по мери m на $[0,1]$.

2. [25] Нека је $C\subseteq[0,1]$ Канторов скуп. Доказати да постоји и израчунати интеграл

$$\int_0^1 \operatorname{dist}(x,C)\,\mathbf{d}x.$$

3. [25] Нека је $(X,\mathfrak{M},\mu)$ простор са коначном мером која нема атоме. Ако је $\mu(X)>0$ доказати да за свако $\varepsilon>0$ постоји скуп $E\in\mathfrak{M}$ тако да је $\mu(E)\in(0,\varepsilon)$.

4. [25] Нека је m мера Лебега на $\mathbb{R}$ и нека су дати бројеви $p,q,r\in(0,+\infty)$ за које важи

$$\|fg\|_r \leqslant 2023\cdot\|f\|_p\|g\|_q \quad \text{за свако} \quad f\in L^p(\mathbb{R},m) \quad \text{и} \quad g\in L^q(\mathbb{R},m).$$

Доказати једнакост $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.

5. Нека је $(X,\mathfrak{M})$ мерљив простор и μ_1 и μ_2 вероватносне мере на $\mathfrak{M}$ и нека је $\lambda=\mu_1-\mu_2$.

(а) [5] Доказати да је λ комплексна мера на сигма алгебри $\mathfrak{M}$.

(б) [20] Доказати једнакост $|\lambda|(X) = 2\sup\limits_{A\in\mathfrak{M}}|\lambda(A)|$.

Напомена: Време за израду задатака износи 180 минута. Укупан број поена које носе задаци је 125. Максимални број поена на писменом испиту је 100. У угластим заградама је наведено колико поена носи одговарајући задатак или неки његов део.