(B) Стационарне тачке добијамо као решења система $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \ln((x-1)^2+y^2) + (x-1)y \cdot \frac{1}{(x-1)^2+y^2} \cdot 2(x-1)$$

$$= y\left(\ln((x-1)^2+y^2) + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x-1)\ln((x-1)^2+y^2) + (x-1)y \cdot \frac{1}{(x-1)^2+y^2} \cdot 2y$$

$$= (x-1)\cdot\left(\ln((x-1)^2+y^2) + \frac{2y^2}{(x-1)^2+y^2}\right)$$

1. случај: $y=0 \wedge x-1=0 \rightarrow \boxed{A_1(1,0)}$

2. случај: $y=0 \wedge \ln((x-1)^2+y^2) + \frac{2y^2}{(x-1)^2+y^2} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\ln((x-1)^2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x-1)^2 = 1$$

$$\boxed{A_2(2,0),\ A_3(0,0)}$$

3. случај: $\ln((x-1)^2+y^2) + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2} = 0 \wedge x=1$

$$\Downarrow$$

$$\ln y^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 = 1$$

$$\boxed{A_4(1,1),\ A_5(1,-1)}$$

4. случај: $\ln((x-1)^2+y^2) + \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2} = 0$

$-$ $\ln((x-1)^2+y^2) + \dfrac{2y^2}{(x-1)^2+y^2} = 0$

$$\frac{2}{(x-1)^2+y^2}\cdot\left((x-1)^2 - y^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ (x-1)^2 = y^2$$

$$\Rightarrow\ \ln(2y^2) + \frac{2y^2}{y^2+y^2} = 0$$

$$\ln(2y^2) = -1$$

$$2y^2 = \frac{1}{e} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2e} \text{ и } (x-1)^2 = \frac{1}{2e}$$

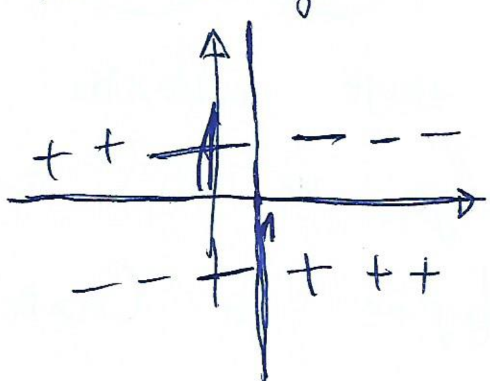
$$\boxed{A_6\left(1+\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right),\ A_7\left(1+\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right),\ A_8\left(1-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right),\ A_9\left(1-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)}$$

Сада треба испитати природу стационарних тачака.

1. случај: $A_1(1,0)$ није локални екстремум јер је

$f(x,y)$ мења знак као на слици

$$f(x,y) = (x-1)\,y\,\underbrace{\ln((x-1)^2+y^2)}_{<0}$$



2. случај: $A_3(0,0)$ (A_2 аналогно) $\Rightarrow f(A_3)=0$

Друга квадратна форма и Силвестеров критеријум не би дали решење. Израчунајмо

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\underbrace{\left(\frac{1}{n}-1\right)}_{<0}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{>0}\underbrace{\ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}\right)}_{<0}$$

$$1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}<1$$

јер је $\frac{2}{n}>\frac{2}{n^2}$ (за довољно велико n)

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)>0$, а

$$f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)=\underbrace{\left(\frac{1}{n}-1\right)}_{<0}\underbrace{\left(-\frac{1}{n}\right)}_{<0}\underbrace{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}\right)}_{<0}, \text{тј.}$$

$f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)<0$ па A_3 није локални екстремум.

3. случај: $A_4(1,1)$ (A_5 аналогно) $\Rightarrow f(A_4)=0$

$$f\left(1+\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)=\underbrace{\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{>0}\cdot\underbrace{\ln\Big(\underbrace{\frac{1}{n^2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}_{>1}\Big)}_{>0}>0$$

$$f\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)=\underbrace{\left(-\frac{1}{n}\right)}_{<0}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{>0}\cdot\underbrace{\ln\left(\frac{1}{n^2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right)}_{>0}<0$$

па ни A_4 није локални екстремум.

Иначе, ни овде не би помогла друга квадратна форма и Силвестер.

4. случај: Довољно је проверити да ли је A_6 локални екстремум и имати на уму да је $f(A_6) = f(A_9) = -f(A_7) = -f(A_8)$

Сада рачунамо другу квадратну форму.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y \cdot \left[\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2} + \underbrace{\frac{4(x-1)\cdot\left((x-1)^2+y^2\right) - 4(x-1)^3}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}}_{\text{овај разделимо на два}} \right]$$

$$= \frac{2(x-1)y}{(x-1)^2+y^2} + \frac{4(x-1)y}{(x-1)^2+y^2} - \frac{4(x-1)^3 y}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}$$

$$= \frac{6(x-1)y}{(x-1)^2+y^2} - \frac{4(x-1)^3 y}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}$$ и слично

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{6(x-1)y}{(x-1)^2+y^2} - \frac{4(x-1)y^3}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \ln\left((x-1)^2+y^2\right) + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2} + y \cdot \left[\frac{2y}{(x-1)^2+y^2} + \frac{-4(x-1)^2 y}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2} \right]$$

$$= \ln\left((x-1)^2+y^2\right) + \frac{2\left((x-1)^2+y^2\right)}{(x-1)^2+y^2} - \frac{4(x-1)^2 y^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}$$

$$= \ln\left((x-1)^2+y^2\right) + 2 - \frac{4(x-1)^2 y^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}$$

III слу

$A_6 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ ће:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_6) = \frac{6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2e}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2} - \frac{4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2e}}}{\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2\right)^2}$$

$$= \frac{6 \cdot \frac{1}{2e}}{\frac{1}{2e} + \frac{1}{2e}} - \frac{4 \cdot \left(\frac{1}{2e}\right)^2}{\left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{2e}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{6}{\cancel{2e}}}{\frac{2}{\cancel{2e}}} - \frac{4 \cdot \frac{1}{\cancel{(2e)^2}}}{\frac{2^2}{\cancel{(2e)^2}}}$$

$$= 3 - 1 = 2$$ и слично

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A_6) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A_6) = \ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2\right) + 2 - \frac{4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2\right)^2}$$

$$= \ln \frac{1}{e} + 2 - \frac{4 \cdot \frac{1}{\cancel{2e}} \cdot \frac{1}{\cancel{2e}}}{\frac{1}{\cancel{e^2}}}$$

$$= -1 + 2 - 1 = 0$$

$$d^2 f(A_6) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} 2 > 0 \\ 4 > 0 \end{matrix}\right\}$$ $\Rightarrow$ позитивно дефинитна $\Rightarrow f$ достиже min

у тачкама A_6 и A_9.

$f(A_6) = f(A_9) = \frac{1}{\ldots}$

⇒ У тачкама A_7 и A_8 се достиже локални максимум и он износи

$$\boxed{f(A_7) = f(A_8) = \frac{1}{2e}}$$

г) У тачкама локалних екстремума

$$(x-1)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2 = \frac{1}{2e} + \frac{1}{2e} = \frac{1}{e}$$

па како $\frac{1}{e} \notin [\frac{1}{2}, 2]$ то $A_i \notin D$ за $i \in \{6,7,8,9\}$ па минимум и максимум на D треба тражити на граници. Како је D компактан и повезан то је $f(D) = [a, b]$.

1. случај: за $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$. Тада је

$$f(x,y) = (x-1)y \cdot \ln\frac{1}{2} = -\ln 2\,(x-1)y$$

Тражимо min/max $g(x,y) = (x-1)y$ при условy $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$. По АГ неједнакости

$$|(x-1)y| \le \frac{(x-1)^2 + y^2}{2} = \frac{1}{4}$$

и $\frac{1}{4}$, односно $-\frac{1}{4}$, се достижу респ. за $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, тј. $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\ln 2}{4} \le f(x,y) \le \frac{\ln 2}{4}} \quad (*)$$

2. случај: За $(x-1)^2+y^2=2$ посматрамо

$f(x,y)=(x-1)y\ln 2$. Опет, по АГ неједнакости

$|(x-1)y| \leq \frac{(x-1)^2+y^2}{2}=1$, а имамо да је

за $x=2, y=1 \to (x-1)y=1$, односно

за $x=2, y=-1 \to (x-1)y=-1$.

$\Rightarrow (\#)\ -\ln 2 \leq f(x,y) \leq \ln 2$ за $\{(x,y) \mid (x-1)^2+y^2=2\}$

Из $(*)$ и $(\#)$ коначно добијамо да је

$$f(D)=[-\ln 2, \ln 2]$$