Решења колоквијума из Анализе 2, 31.1.2020.

(1) $X = C[0,1]$ и $d : X \times X \to \mathbb{R}$

$$d(f,g) = \begin{cases} \max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)| + \max\limits_{0\le x\le 1}|\alpha g(x)|, & f \ne g \\ 0, & f = g \end{cases}$$

a) Да би d била метрика, мора важити:

(1) $d(f,g) \ge 0$ што је очигледно тачно

(2) $d(f,g) = 0 \iff f = g$

$\Downarrow$

уколико је $f \ne g$, тада је $d(f,g) = \max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)| + \max\limits_{0\le x\le 1}|\alpha g(x)|$

па је овај израз једнак 0

ако је $\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)| = 0 \;\wedge\; \max\limits_{0\le x\le 1}|\alpha g(x)| = 0$

тј. $f \equiv 0 \;\wedge\; \alpha g \equiv 0$

Како је $f \ne g$ то не може $g \equiv 0 \Rightarrow \alpha \ne 0$ (траже се позитивне константе)

$\Rightarrow$ за $f \ne g \Rightarrow d(f,g) > 0$

(3) $d(f,g) = \max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)| + \max\limits_{0\le x\le 1}|\alpha g(x)|$

$\quad\;\; \|$

$d(g,f) = \max\limits_{0\le x\le 1}|g(x)| + \max\limits_{0\le x\le 1}|\alpha f(x)|$

Па ово мора важити за све $f, g \in C[0,1]$

Убацимо $g \equiv 0$, $f \not\equiv 0$ $\Rightarrow \max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)| = |\alpha| \max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)| \Rightarrow |\alpha| = 1$ $(\alpha = 1)$

(4) Проверяваме само за $\boxed{\alpha = 1}$

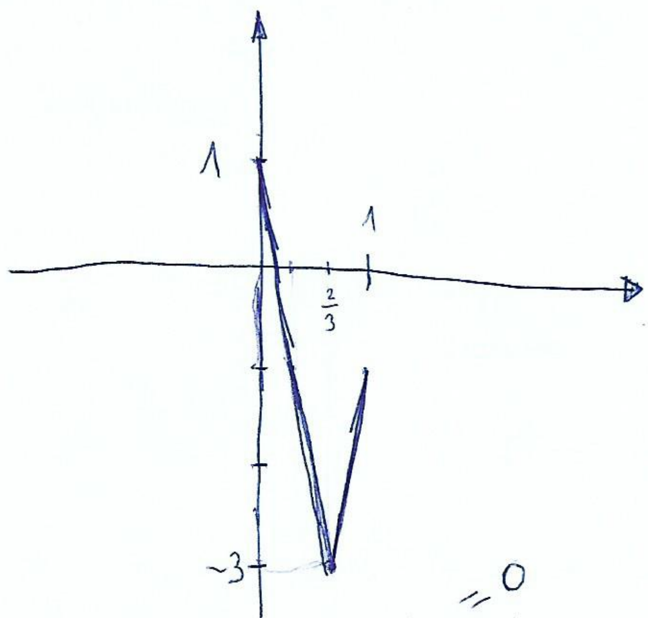
$$d(f,h) = \max_{0\le x\le 1}|f(x)| + \max_{0\le x\le 1}|h(x)|$$

$$d(f,g)+d(g,h) = \max_{0\le x\le 1}|f(x)| + \max_{0\le x\le 1}|g(x)| + \max_{0\le x\le 1}|g(x)| + \max_{0\le x\le 1}|h(x)|$$

$$2\max_{0\le x\le 1}|g(x)| \ge 0$$

$$\Rightarrow d(f,h) \le d(f,g)+d(g,h)$$

б) $f_0(x) = 0$ и $f_1(x) = |6x-4|-3$



$$\max_{x\in[0,1]}|f_1(x)| = 3$$

$$g\in B(f_0,1) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \overbrace{\max_{x\in[0,1]}|f_0(x)|}^{=0} + \max_{x\in[0,1]}|g(x)| < 1 \\ \vee\ g = f_0 = 0 \end{array}\right\} = \{g\in C[0,1] \mid \max_{x\in[0,1]}|g(x)|<1\}$$

$$g\in B(f_1,1) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \overbrace{\max_{x\in[0,1]}|f_1(x)|}^{=3} + \max_{x\in[0,1]}|g(x)| < 1 \\ \vee\ g = f_1 \end{array}\right\} B(f_1,1) = \{f_1\}$$

$$B(f_1,4) = \{g\in C[0,1] \mid \max_{x\in[0,1]}|g(x)| < 1 \vee g = f_1\}$$

в) $d\left(B(f_0,1),\, B(f_1,1)\right)$

$$= \inf_{f\in B(f_0,1)} d(f, f_1) \quad \text{(пошто } f_1 \notin B(f_0,1))$$

$$= \inf_{f\in B(f_0,1)} \Big(\underbrace{\max_{x\in[0,1]} |f(x)|}_{\le 0} + \overset{=3}{\max_{x\in[0,1]} |f_1(x)|} \Big) = 3$$

а једнако 0 за $f \equiv 0$

$\operatorname{diam}\left(B(f_1,4)\right)$

$$= \sup_{f,g\in B(f_1,4)} d(f,g) \qquad \text{свакако је } \ge 0$$

$$= \sup_{f,g\in B(f_1,4)} \Big(\max_{x\in[0,1]} |f(x)|^{\le 3} + \underbrace{\max_{x\in[0,1]} |g(x)|^{\le 1}}_{} \Big) \le 4$$

$\Rightarrow$ не могу обе бити 3 јер би обе једнаке f_1

узмимо $f \equiv f_1$

и $\boxed{g_n(x) = 1 - \frac{1}{n}}$ $\Rightarrow \operatorname{diam}\left(B(f_1,4)\right) = 4$

г) $A = \{ f \in X \mid \sin(f(x) - x) = 1$ за свако $x \in [0,1] \}$

$$= \left\{ f_n(x) = x + \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Из б) смо проверили да је

свака ф-ја отворен скуп

Наиме $B\left(f_n, \dfrac{\max_{0\le x\le 1} |f_n(x)|}{2}\right) = \{f_n\} \subseteq A$

$\Rightarrow A$ је отворен као унија отворених и самим

тим затворен.

$B = \{ f(x) \mid$ постоји $g \in X$ тако да за свако

$x \in [0,1]$ важи $2f(x) = \underbrace{\operatorname{arctg}(g(x))}_{\in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \}$

$= B(0; \frac{\pi}{4})$ → отворен скуп као

отворена лопта, али слично и затворен

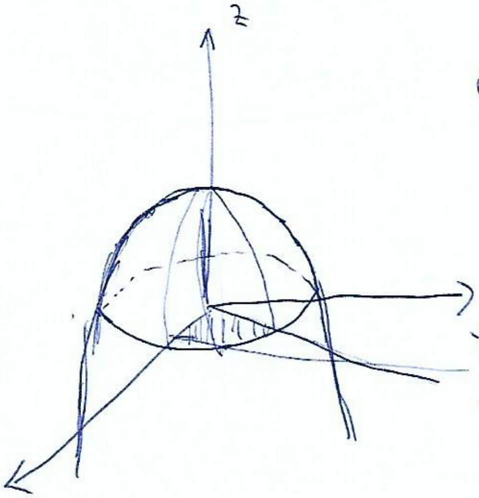
⇒ $A \cup B$ је отворен и затворен

A и B су отворени / затворени скупови

у $A \cup B$ и $A \cap B = \emptyset$ па чине дисконекцију,

тј. $A \cup B$ није повезан.

3) $z=0$, $y=0$, $y = x\sqrt{3}$, $x\sqrt{2} = 1$, $x^2+y^2+z=1$

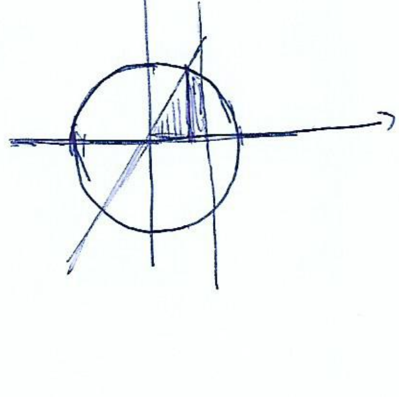


$0 \le z \le 1 - x^2 - y^2$

у O_{xy} равни | $z=0$

$y=0$, $y = x\sqrt{3}$, $x\sqrt{2} = 1$, $x^2+y^2=1$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$



$(x\sqrt{3})^2 + x^2 = 1$

$4x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$$V = \iiint_T dx\,dy\,dz = \iint_D (1-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{D_1} (1-x^2-y^2)\,dx\,dy + \iint_{D_2} (1-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{x\sqrt{3}} (1-x^2-y^2)\,dy \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y - yx^2 - \overset{= x^3 \cdot 3\sqrt{3}}{\frac{y^3}{3}}\right) \Bigg|_{y=0}^{y=x\sqrt{3}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(y - yx^2 - \frac{y^3}{3}\right) \Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x\sqrt{3} - x^3\sqrt{3} - x^3\sqrt{3}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{3}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (x\sqrt{3} - 2x^3\sqrt{3})\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}x^2\sqrt{1-x^2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2\sqrt{3}}{2} - \cancel{2} \cdot \frac{x^4}{\cancel{4}_2}\sqrt{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad \begin{aligned} x &= \sin t \\ dx &= \cos t\,dt \checkmark \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underbrace{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right)}_{\frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{4}{16}} + \frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\cos^4 t}_{= (\cos^2 t)^2 = \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2}\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{16} + \frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}}{4}\,dt$$

$$= \ldots$$

$\boxed{2}$ $$f(x,y) = \begin{cases} (x-1)y \ln\left((x-1)^2+y^2\right), & (x,y)\neq(1,0) \\ a, & (x,y)=(1,0) \end{cases}$$

Како је ф-ја f непрекидна, то је

$$a = \lim_{(x,y)\to(1,0)} (x-1)\, y \ln\left((x-1)^2+y^2\right)$$

$x = 1+\rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

$$\Rightarrow a = \lim_{\rho\to 0} \underbrace{\rho^2 \underbrace{\sin\varphi\cos\varphi}_{\text{(ограничена)}} \ln(\rho^2)}_{\to 0} = 0$$

а) Ф-ја је диференцијабилна ван $(1,0)$ као композиција диференцијабилних. Треба испитати још у $(1,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{=0}{f(1+h,0)} - \overset{=0}{f(1,0)}}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{=0}{f(1,h)} - \overset{=0}{f(1,0)}}{h} = 0$$

$$\sigma((h_1,h_2)) = f(1+h_1,h_2) - \overset{=0}{f(1,0)} - \overset{=0}{\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)}h_1 - \overset{=0}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)}h_2$$

Ф-ја је диференцијабилна у $(1,0)$ акко је

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(1+h_1-1)\cdot h_2 \cdot \ln\left((1+h_1-1)^2+h_2^2\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \overset{?}{=} 0$$

$$= \lim \frac{h_1 h_2 \ln(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2 \ln(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \qquad \begin{aligned} h_1&=\rho\cos\varphi \\ h_2&=\rho\sin\varphi \end{aligned}$$

$$= \lim_{\rho\to0} \frac{\rho^{\cancel{2}}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\ln(\rho^2)}{\cancel{\rho}}$$

$$= \lim_{\rho\to0} \rho\, 2\sin\varphi\cos\varphi \ln\rho$$

$$= \sin 2\varphi \lim_{\rho\to0} \rho\ln\rho = 0$$

$$\lim_{\rho\to0} \frac{\ln\rho}{\frac{1}{\rho}} = \lim_{\rho\to0} \frac{\frac{1}{\rho}}{-\frac{1}{\rho^2}} = \lim_{\rho\to0}(-\rho) = 0 \quad ✓$$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на целом $\mathbb{R}^2$

б) Како је f непрекидна на $\mathbb{R}^2$, то је и равномерно непрекидна на сваком компакту. Проблем дакле могу представљати само тачке у „бесконачности". Уочимо низове

$$(x_n', y_n') = (n+1, 0) \to f(x_n', y_n') = 0$$

$$(x_n'', y_n'') = (n+1, \tfrac{1}{n}) \to f(x_n'', y_n'') = (n+1-1)\cdot\frac{1}{n}\cdot\ln\left((n+1-1)^2+\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= n\cdot\frac{1}{n}\ln\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)$$

Тада је $d((x_n', y_n'), (x_n'', y_n'')) = \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \to 0$, а

$d(f(x_n', y_n'), f(x_n'', y_n'')) = \ln\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right) \not\to 0$ (напротив тежи $+\infty$)