Анализа 1 - решења

1. (a) **Домен.** Домен дате функције је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
Парност. Како за свако $x \in \mathbb{R}$ важи да је $f(x) = f(-x)$, закључујемо да је функција парна.
Периодичност. Како је

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

то дата функција није периодична.
Асимптоте. Домен дате функције је цео скуп реалних бројева, па она нема вертикалних асимптота. Видели смо да је

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

па f има хоризонталну асимптоту $y = \frac{\pi}{2}$ када $x \to \pm\infty$, а самим тим не може имати косих асимптота.
Знак. Како је $2x^2 - 2|x| + 1 = (|x|-1)^2 + x^2 > 0$, то је и $f(x) > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, тј. функција f је позитивна на целом домену.
Монотоност. Функција f је диференцијабилна на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ и њен први извод је

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4x-2}{(2x^2-2x+1)^2+1}, & x > 0 \\ \frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2+1}, & x < 0 \end{cases}$$

одакле видимо да је

$$\begin{aligned} f'(x) > 0,\ &\text{за } x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right), \\ f'(x) < 0,\ &\text{за } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ f'(x) = 0,\ &\text{за } x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \end{aligned}$$

па закључујемо да

$$\begin{aligned} &f \text{ расте на } \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right), \\ &f \text{ опада на } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ &x = -\frac{1}{2} \text{ и } x = \frac{1}{2} \text{ су локални минимуми.} \end{aligned}$$

Додатно, имамо да је $f'_-(0) = 2$ и $f'_+(0) = -2$.
Конвексност. Други извод дате функције је

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-4x(x-1)(3x^2-3x+2)}{(2x^4-4x^3+4x^2-2x+1)^2}, & x > 0 \\ \frac{-4x(x+1)(3x^2+3x+2)}{(2x^4+4x^3+4x^2+2x+1)^2}, & x < 0 \end{cases}$$

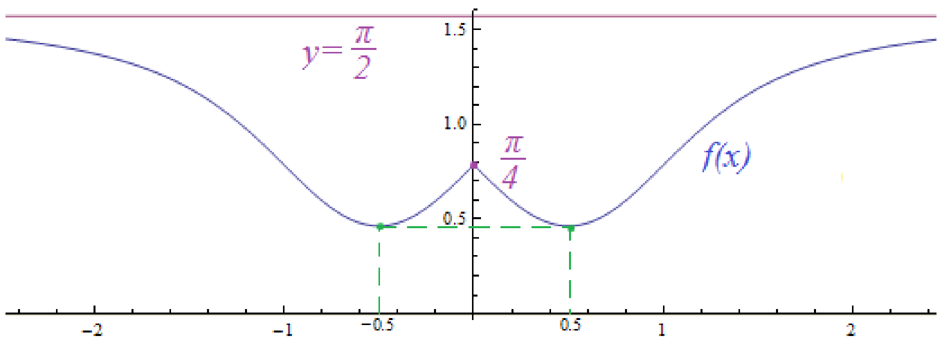
одакле видимо да је

$$
\begin{aligned}
&f''(x) > 0, \text{ за } x \in (-1,1),\\
&f''(x) < 0, \text{ за } x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty),\\
&f''(x) = 0, \text{ за } x \in \{-1,1\},
\end{aligned}
$$

па закључујемо да је

$$
\begin{aligned}
&f \text{ конвексна на } (-1,1),\\
&f \text{ конкавна на } (-\infty,-1)\cup(1,+\infty),\\
&x=-1 \text{ и } x=1 \text{ су превојне тачке.}
\end{aligned}
$$

График.



(б) Приметимо да је $\min f = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.
Уколико је $\alpha \in (-\infty, \operatorname{arctg}\frac{1}{2}) \cup \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$, једначина нема решења;
Уколико је $\alpha \in \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, једначина има четири решења;
Уколико је $\alpha = \frac{\pi}{4}$, једначина има три решења;
Уколико је $\alpha \in \left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, једначина има два решења.

2. Условна конвергенција. $\underline{1^o\ \gamma \leqslant 0}$: Општи члан не тежи нули, па ред дивергира.
$\underline{2^o\ \gamma > 0}$: Нека је

$$f(x) = \frac{\ln x \ln(\ln x)}{x^\gamma}.$$

Тада је

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x) + \ln x \cdot \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot x^\gamma - \gamma x^{\gamma-1}\cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}{x^{2\gamma}}\\
&= \frac{\ln(\ln x)(1-\gamma\ln x)+1}{x^{\gamma+1}} < 0,
\end{aligned}
$$

за довољно велико x (јер је $\gamma > 0$).

Дакле, низ $\alpha_n = \frac{\ln n \ln(\ln n)}{n^\gamma}$ монотоно опада и још је $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, па на основу Лајбницовог критеријума конвергира ред

$$\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n \frac{\ln n \ln(\ln n)}{n^\gamma}. \tag{1}$$

Нека је $a_n = (-1)^n \frac{\ln n \ln(\ln n)}{n^\gamma}$ и $b_n = \cos\frac{2n}{1+n^2}$, $n \geqslant 3$. Из (1) имамо да конвергира ред $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n$, а како низ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ монотоно тежи 1, то на основу Абеловог критеријума закључујемо да конвергира ред

$$\sum_{n=3}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n \ln(\ln n)}{n^\gamma} \cos\frac{2n}{1+n^2}.$$

Апсолутна конвергенција. Приметимо да је

$$\left|(-1)^n \frac{\ln n \ln(\ln n)}{n^\gamma} \cos\frac{2n}{1+n^2}\right| = \frac{\ln n \ln(\ln n)}{n^\gamma} \cdot \left|\cos\frac{2n}{1+n^2}\right| \sim \frac{\ln n \ln(\ln n)}{n^\gamma},\ n \to +\infty.$$

$\underline{1^o\ \gamma \leqslant 1}$: Имамо да је $\left|\frac{\ln n \ln(\ln n)}{n^\gamma}\right| \geqslant \frac{1}{n}$, а како ред $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}$ дивергира, то дивергира и ред $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{\ln n \ln(\ln n)}{n^\gamma}$, па почетни ред апсолутно дивергира.

$\underline{2^o\ \gamma > 1}$: Имамо да је $\left|\frac{\ln n \ln(\ln n)}{n^\gamma}\right| < \frac{1}{n^{\frac{\gamma+1}{2}}}$ и при том ред $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{\gamma+1}{2}}}$ конвергира, па конвергира и $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{\ln n \ln(\ln n)}{n^\gamma}$, одакле закључујемо да почетни ред апсолутно конвергира.

3. (a) $\underline{1^o\ p < 1}$: Сингуларитети су $x = 1$ и $x = +\infty$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^n - p}\mathrm{d}x$ конвергира за $n > 1$ и $\frac{\ln^q x}{(x^4-p)\sqrt{x^2+3}} < \frac{1}{x^4-p}$, за x довољно велико па на основу првог поредбеног критеријума закључујемо да интеграл конвергира у $+\infty$.
Ако је $q \geqslant 0$, онда 1 није сингуларитет па интеграл конвергира.
Ако је $q < 0$, онда је

$$\frac{\ln^q x}{(x^4-p)\sqrt{x^2+3}} \sim \frac{(x-1)^q}{(1-p)\cdot 2},\ x \to 1,$$

па закључујемо да полазни интеграл конвергира када је $q > -1$ јер

$$\int_1^c (x-1)^q \mathrm{d}x$$

конвергира за $q > -1$. $\underline{2^o\ p = 1}$: Сингуларитети су $x = 1$ и $x = +\infty$. Као у случају 1^o добије се да интеграл конвергира у $+\infty$. Са друге стране, имамо

$$\frac{\ln^q x}{(x^4-1)\sqrt{x^2+3}} = \frac{\ln^q x}{x-1} \cdot \frac{1}{(x+1)(x^2+1)\sqrt{x^2+3}} \sim \frac{1}{8}(x-1)^{q-1},\ x \to 1,$$

па закључујемо да интеграл конвергира за $q - 1 > -1$, тј. за $q > 0$.
$\underline{3^o\ p > 1}$: Сингуларитети су $x = 1$, $x = \sqrt[4]{p}$ и $x = +\infty$. Поново конвергенцију интеграла у $+\infty$ добијамо исто као у случају 1^o, а конвергенцију у $x = 1$, слично као у случају 2^o, имамо за $q > -1$. Како је

$$\frac{\ln^q x}{(x^n-p)\sqrt{x^2+3}} \sim \frac{\ln^q \sqrt[4]{p}}{4p\sqrt{\sqrt{p}+3}} \cdot \frac{1}{\frac{x}{\sqrt[4]{p}} - 1},\ x \to \sqrt[4]{p},$$

то интеграл $\int\limits_{\sqrt[4]{p}}^{c} \frac{\mathrm{d}x}{\frac{x}{\sqrt[4]{p}}-1}$ дивергира, за $c > 1$, па дивергира и полазни интеграл.

Коначно, закључујемо да дати интеграл конвергира ако је $p < 1$ и $q > -1$ или ако је $p = 1$ и $q > 0$.

(б) Ако је $p = q = 0$ дати интеграл постаје $I = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+3}}$.

Уведимо смену $\sqrt{x^2+3} = tx + \sqrt{3}$. Тада је $x = \frac{2\sqrt{3}t}{1-t^2}$, па је $\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3}(1+t^2)}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t$ и

$$\sqrt{x^2+3} = tx + \sqrt{3} = t \cdot \frac{2\sqrt{3}t}{1-t^2} + \sqrt{3} = \sqrt{3}\frac{t^2+1}{1-t^2},$$

па је

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{1-t^2}{\sqrt{3}(t^2+1)}.$$

Када изразимо t, добијамо да је

$$t = \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{x},$$

па ако је $x = 1$, биће $t = 2 - \sqrt{3}$ и ако је $x = +\infty$, биће $t = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{x} = 1$. Када убацимо смену добијамо

$$\begin{aligned}
I &= \int_{2-\sqrt{3}}^{1} \frac{(1-t^2)^4}{(2\sqrt{3}t)^4} \cdot \frac{1-t^2}{\sqrt{3}(t^2+1)} \cdot \frac{2\sqrt{3}(1+t^2)}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_{2-\sqrt{3}}^{1} \frac{(1-t^2)^3}{8\cdot 9t^4}\mathrm{d}t \\
&= \int_{2-\sqrt{3}}^{1} \frac{1}{72}\left(1-3t^2+3t^4-t^6\right)\cdot\frac{1}{t^4}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{72}\left(-\frac{1}{3t^3}+\frac{3}{t}+3t-\frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_{2-\sqrt{3}}^{1} \\
&= \frac{1}{72}\left(-\frac{1}{3}+3+3-\frac{1}{3}+\frac{1}{3(2-\sqrt{3})^3}-\frac{3}{2-\sqrt{3}}-3(2-\sqrt{3})+\frac{1}{3}(2-\sqrt{3})^2\right) \\
&= \frac{4}{27}.
\end{aligned}$$

4. (а) За $\varepsilon > 0$ довољно мало и $0 < x < \varepsilon$ важи

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots + \frac{f^{(2019)}(0)}{2019!}x^{2019} + \frac{f^{(2020)}(\xi)}{2020!}x^{2020},\ \xi\in(0,\varepsilon). \tag{2}$$

Како је $f^{(2020)}$ непрекидна функција и $f^{(2020)}(0) < 0$, можемо узети ε довољно мало тако да буде $f^{(2020)}(x) < 0$ за свако $x \in (0,\varepsilon)$, па кад у (2) убацимо услове $f(0) = f''(0) = \ldots = f^{(2019)}(0) = 0,\ f'(0) = 1$, добијамо

$$f(x) = x + \frac{f^{(2020)}(\xi)}{2020!}x^{2020} = x + cx^{2020},\ c < 0.$$

Такође, у малој околини биће и $f'(x) > 0$, тј. f расте, па добијамо да је

$$f(0) = 0 < f(x) < x, \ x \in (0, \varepsilon), \tag{3}$$

па можемо узети $\delta := \varepsilon$.

(б) Нека је $a_1 = \frac{1}{2}\delta$, $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \geqslant 1$. Испитујемо конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^r$ у зависности од $r \in \mathbb{R}$.

Из услова $a_{n+1} = f(a_n)$ и $f(x) < x$ за $x \in (0, \delta)$ имамо да низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ опада ако су му сви чланови мањи од δ, али $a_1 < \delta$, па ако претпоставимо да је $a_n < \delta$, применом индукције и коришћењем неједнакости $f(a_n) = a_{n+1} < a_n < \delta$, закључујемо да низ заиста опада. Такође, из (3) имамо да је $a_n \geqslant 0$ за $n \in \mathbb{N}$ и да је

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Јасно, ако је $r = 0$, $a_n = 1$ па ред дивергира. Ако је $r < 0$, онда $a_n^r \to +\infty$, па ред поново дивергира. Остаје још да испитамо случај $r > 0$.

Нека је $r > 0$. Срачунајмо $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n^{2019}$. Како низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тежи нули, Штолцова теорема нам даје

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n a_n^{2019} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{a_{n+1}^{-2019} - a_n^{-2019}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(f(a_n))^{-2019} - a_n^{-2019}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^{2019}}{\left(\frac{a_n}{f(a_n)}\right)^{2019} - 1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\big(a_n f(a_n)\big)^{2019}}{a_n^{2019} - (f(a_n))^{2019}}.
\end{aligned}$$

Али, $a_n f(a_n) = a_n^2 + \mathcal{O}(a_n^{2021})$, $n \to +\infty$ док је

$$\begin{aligned}
a_n^{2019} - f(a_n)^{2019} &= (a_n - f(a_n))(a_n^{2018} + a_n^{2017} f(a_n) + \cdots + (f(a_n))^{2018}) \\
&= -\frac{f^{(2020)}(\xi_n)}{2020!} a_n^{2020} \mathcal{O}(a_n^{2018}) \\
&\sim -\frac{f^{(2020)}(0)}{2020!} \mathcal{O}(a_n^{2018}),
\end{aligned}$$

због непрекидности 2020-тог извода.

Тако је

$$0 < \lim_{n\to+\infty} a_n^{2019} n = c,$$

па је

$$a_n \sim n^{-\frac{1}{2019}} \text{ и } a_n^r \sim n^{-\frac{r}{2019}} = \frac{1}{n^{\frac{r}{2019}}},$$

па ред дивергира за $r \geqslant 2019$ и конвергира за $r < 2019$.

5. Очигледно да тврђење не важи за 2020 јер можемо узети $f(x) = x$. Поделимо ли сегмент $[a, b]$ на 2019 интервала

$$a = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{2019} = b,$$

можемо применити Лагранжову теорему на сваки од интервала $[y_i, y_{i+1}]$, па добијамо $\xi_i \in (y_i, y_{i+1})$ тако да је

$$f'(\xi_i) = \frac{f(y_{i+1}) - f(y_i)}{y_{i+1} - y_i},\ 0 \leqslant i \leqslant 2018.$$

Сада имамо

$$\sum_{i=0}^{2018} \frac{1}{f'(\xi_i)} = \sum_{i=0}^{2018} \frac{y_{i+1} - y_i}{f(y_{i+1}) - f(y_i)}.$$

Нека су тачке y_i такве да је $y_0 = a$, $y_{2019} = b$ и

$$f(y_{i+1}) - f(y_i) = \frac{b-a}{2019},\ 0 \leqslant i \leqslant 2018.$$

Тада је

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2018} \frac{1}{f'(\xi_i)} &= \sum_{i=0}^{2018} \frac{y_{i+1} - y_i}{\frac{b-a}{2019}} \\
&= \frac{2019}{b-a} \sum_{i=0}^{2018} (y_{i+1} - y_i) \\
&= \frac{2019}{b-a} (b-a) \\
&= 2019.
\end{aligned}$$