Решења за Анализу 1 у року јун2

6.7.2019.

1. Прво смена $x = \sinh t$, па смена $u = e^t$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sinh t + 1} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2e^t dt}{e^{2t} + 2e^t - 1} \\
&= 2\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 2u - 1} \\
&= 2\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{du}{u^2+2u-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{M\to+\infty} \left(\int_1^M \frac{du}{u - \sqrt{2} + 1} - \int_1^M \frac{du}{u + \sqrt{2} + 1} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{M\to+\infty} \left(\log(u - \sqrt{2} + 1)\big|_1^M - \log(u + \sqrt{2} + 1)\big|_1^M \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{M\to+\infty} \left(\log \frac{M - \sqrt{2} + 1}{M + \sqrt{2} + 1} - \log(2 - \sqrt{2}) + \log(2 + \sqrt{2}) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

2. Важи $n\pi - \pi/2 \le x_n \le n\pi + \pi/2$ (видети график); ред конвергира по поредбеном критеријуму.

3. (а) Нека је $I_n := \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{x+1} dx$.

$$I_n = \int_0^1 \frac{d(x^n)}{x+1} = \frac{x^n}{x+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2} dx.$$

Саберимо ово са

$$I_{n+1} = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2} dx$$

и добијамо

$$I_n + I_{n+1} = 1 + \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{(x+1)^2} dx = 1 + \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx = 1 + \frac{1}{n+1} I_{n+1}.$$

Сада је

$$I_{n+1} = \frac{n+1}{n} - \frac{n+1}{n} I_n.$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2} dx \le \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2} dx = I_n,$$

па је низ опадајући. Очигледно је $I_n \ge 0$, па је низ конвергентан, $L := \lim_{n\to+\infty} I_n$. Преласком на лимес у горњој рекурентној вези добијамо $L = 1 - L$, односно $L = \frac{1}{2}$.

(б) Уводимо смену $t := -x$:

$$I := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + a^x} dx = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{\cos^2(-t)}{1 + a^{-t}} (-dt) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^t \cos^2 t}{1 + a^t} dt.$$

Сада је

$$2I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x} dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a^x \cos^2 x}{1+a^x} dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \pi.$$

Дакле, $I = \pi/2$.

4. (а)

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt &= -\frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t} \cdot (-2te^{-t^2}) dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t} \cdot d\left(e^{-t^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{e^{-t^2}}{t} |_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \right] \\
&= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt.
\end{aligned}$$

Сада процењујемо $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt$ у односу на $e^{-x^2} x^{-2}$ применом Лопитала.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt}{e^{-x^2} x^{-2}} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^{-x^2} x^{-2}}{-2e^{-x^2} x^{-3} - 2e^{-x^2} x^{-1}} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^{-1} + 2x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Дакле, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt = o(e^{-x^2} x^{-2})$, $x \to +\infty$. Следи:

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = e^{-x^2} \left(\frac{1}{2x} + o(x^{-2}) \right),\ x \to +\infty.$$

(б)

$$e^{x^2} \cos\left(x + \frac{1}{x}\right) \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\cos(x + x^{-1})}{2x} + o(x^{-2}) = \frac{\cos x}{2x} \cos(x^{-1}) - \frac{\sin(x^{-1})}{2x} \sin x + o(x^{-2}),\ x \to +\infty.$$

$\int^{+\infty} \frac{\cos x}{2x} dx$ конвергира по Дирихлеу; $\cos(x^{-1}) \nearrow 1$, па $\int^{+\infty} \frac{\cos x}{2x} \cos(x^{-1}) dx$ конвергира по Абелу; ова конвергенција је условна: $\left|\frac{\cos x}{2x} \cos(x^{-1})\right| \sim \frac{|\cos x|}{2x}$, а $\int^{+\infty} \frac{|\cos x|}{2x} dx$ дивергира. $\left|\frac{\sin(x^{-1})}{2x} \sin x\right| \leq \frac{|\sin(x^{-1})|}{2x} \sim \frac{1}{2x^2}$, па $\int^{+\infty} \frac{\sin(x^{-1})}{2x} \sin x dx$ апсолутно конвергира по поредбеном критеријуму. $\int^{+\infty} o(x^{-2}) dx$ такође конвергира по поредбеном критеријуму. Закључак је да $\int_1^{+\infty} \left(e^{x^2} \cos\left(x + \frac{1}{x}\right) \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) dx$ условно конвергира.