Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - први колоквијум
22.5.2022.

1. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером. Кажемо да је мера μ *полуконачна* ако за сваки $E \in \mathfrak{M}$ такав да је $\mu(E) = +\infty$, постоји $F \subseteq E$ такав да је $0 < \mu(F) < +\infty$.
   а) Доказати да је свака σ-коначна мера полуконачна.
   б) Да ли је свака полуконачна мера σ-коначна?
   в) Нека је μ полуконачна мера. Ако је $E \in \mathfrak{M}$ такав да је $\mu(E) = +\infty$, доказати да за сваки $C > 0$ постоји $F \subseteq E$ такав да је $C < \mu(F) < +\infty$.
2. Израчунати
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{3}{n}}^{1} \frac{\cos x}{\operatorname{arctg} x \ \cdot \ \ln^2(nx)}\, dx.$$
3. Израчунати
$$\lim_{n\to\infty} \int_{1}^{n} \operatorname{arctg}(n + \log_{2022} x) \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\pi x}\, dx.$$

Напомена: Време за израду задатака је 180 минута.

Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - први колоквијум
22.5.2022.

1. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером. Кажемо да је мера μ *полуконачна* ако за сваки $E \in \mathfrak{M}$ такав да је $\mu(E) = +\infty$, постоји $F \subseteq E$ такав да је $0 < \mu(F) < +\infty$.
   а) Доказати да је свака σ-коначна мера полуконачна.
   б) Да ли је свака полуконачна мера σ-коначна?
   в) Нека је μ полуконачна мера. Ако је $E \in \mathfrak{M}$ такав да је $\mu(E) = +\infty$, доказати да за сваки $C > 0$ постоји $F \subseteq E$ такав да је $C < \mu(F) < +\infty$.
2. Израчунати $\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{3}{n}}^{1} \frac{\cos x}{\operatorname{arctg} x \ \cdot \ \ln^2(nx)}\, dx$.
3. Израчунати
$$\lim_{n\to\infty} \int_{1}^{n} \operatorname{arctg}(n + \log_{2022} x) \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\pi x}\, dx.$$

Напомена: Време за израду задатака је 180 минута.