

1. Нека је  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| = 2\}$  и функција  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задата са  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \cup [5, +\infty) \\ 1, & x \in K \\ 2, & x \in [0, 1] \setminus K \\ 3, & x \in (1, 5) \end{cases}$ ,

где је  $K$  Канторов скуп.

- а) Одредити  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{M}$  на скупу  $X$  генерисану фамилијом  $\mathcal{A}$ .  
б) Одредити најмању  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{N}$  на скупу  $X$  у којој је  $f$   $\mathfrak{N}$ -мерљива.  
в) Да ли је  $f$   $\mathfrak{M}$ -мерљива функција?  
г) Да ли постоји неконстантна функција  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  таква да је и  $\mathfrak{M}$ -мерљива и  $\mathfrak{N}$ -мерљива?
2. Израчунати  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt[3]{n}} \frac{x}{1+n \ln\left(1+\frac{x^3}{n}\right)} dx$ .
3. Израчунати  $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} e^{-x} dx$ .
4. Нека је  $S = \{f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_1^{+\infty} |f(x)|^3 x^2 \ln^2(1+x) dx < +\infty\}$ . Доказати да је
- $$S \subseteq L^1(1, +\infty) \cap L^3(1, +\infty).$$

**Напомена:** Време за израду задатака је 180 минута.

1. Нека је  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| = 2\}$  и функција  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задата са  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \cup [5, +\infty) \\ 1, & x \in K \\ 2, & x \in [0, 1] \setminus K \\ 3, & x \in (1, 5) \end{cases}$ ,

где је  $K$  Канторов скуп.

- а) Одредити  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{M}$  на скупу  $X$  генерисану фамилијом  $\mathcal{A}$ .  
б) Одредити најмању  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{N}$  на скупу  $X$  у којој је  $f$   $\mathfrak{N}$ -мерљива.  
в) Да ли је  $f$   $\mathfrak{M}$ -мерљива функција?  
г) Да ли постоји неконстантна функција  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  таква да је и  $\mathfrak{M}$ -мерљива и  $\mathfrak{N}$ -мерљива?
2. Израчунати  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt[3]{n}} \frac{x}{1+n \ln\left(1+\frac{x^3}{n}\right)} dx$ .
3. Израчунати  $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} e^{-x} dx$ .
4. Нека је  $S = \{f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_1^{+\infty} |f(x)|^3 x^2 \ln^2(1+x) dx < +\infty\}$ . Доказати да је
- $$S \subseteq L^1(1, +\infty) \cap L^3(1, +\infty).$$

**Напомена:** Време за израду задатака је 180 минута.