Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - Јун 1
15.6.2022.

1. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером. Дефинишимо функцију $\mu^* : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ са
$$\mu^*(E) := \sup\{\mu(F) \mid F \subseteq E, F \in \mathfrak{M} \text{ и } \mu(F) < +\infty\}.$$
   а) Доказати да је μ^* мера на $(X, \mathfrak{M})$.
   б) Ако је μ^* σ-коначна мера, доказати да је $\mu^* = \mu$.
2. а) Да ли низ функција $f_n(t) := \frac{n(1+t)^n e^{-nt}}{1+n^2t^2}$ има интеграбилну доминанту на $[-1, +\infty)$?
   б) Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+\infty} \frac{n(1+t)^n e^{-nt}}{1+n^2t^2}\, dt$.
3. Израчунати $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x})^2} \ln x\, dx$.
4. Нека је дат простор са мером $((0, 10), \mathcal{B}(0, 10), \mu)$, где је $\mathcal{B}(0, 10) := \{A \cap (0, 10) \colon A \in \mathcal{B}\}$, где је $\mathcal{B}$ Борелова σ-алгебра на $\mathbb{R}$, а μ контракција Лебегове мере m на $(0, 10)$. Нека даље $f \in L^p((0, 10), \mu)$ за фиксирано $p \in (1, +\infty)$. Ако је $\alpha < 2 - \frac{1}{p}$ и функција $g : (0, 10) \to \mathbb{R}$ дефинисана са $g(x) := \frac{\sin x}{x^\alpha} f(x)$, доказати да $g \in L^1((0, 10), \mu)$.

Напомена: Време за израду задатака је 180 минута.

Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - Јун 1
15.6.2022.

1. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером. Дефинишимо функцију $\mu^* : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ са
$$\mu^*(E) := \sup\{\mu(F) \mid F \subseteq E, F \in \mathfrak{M} \text{ и } \mu(F) < +\infty\}.$$
   а) Доказати да је μ^* мера на $(X, \mathfrak{M})$.
   б) Ако је μ^* σ-коначна мера, доказати да је $\mu^* = \mu$.
2. а) Да ли низ функција $f_n(t) := \frac{n(1+t)^n e^{-nt}}{1+n^2t^2}$ има интеграбилну доминанту на $[-1, +\infty)$?
   б) Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+\infty} \frac{n(1+t)^n e^{-nt}}{1+n^2t^2}\, dt$.
3. Израчунати $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x})^2} \ln x\, dx$.
4. Нека је дат простор са мером $((0, 10), \mathcal{B}(0, 10), \mu)$, где је $\mathcal{B}(0, 10) := \{A \cap (0, 10) \colon A \in \mathcal{B}\}$, где је $\mathcal{B}$ Борелова σ-алгебра на $\mathbb{R}$, а μ контракција Лебегове мере m на $(0, 10)$. Нека даље $f \in L^p((0, 10), \mu)$ за фиксирано $p \in (1, +\infty)$. Ако је $\alpha < 2 - \frac{1}{p}$ и функција $g : (0, 10) \to \mathbb{R}$ дефинисана са $g(x) := \frac{\sin x}{x^\alpha} f(x)$, доказати да $g \in L^1((0, 10), \mu)$.

Напомена: Време за израду задатака је 180 минута.