Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - други колоквијум
15.6.2022.

1. Израчунати $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x})^2} \ln x \, dx$.

2. Нека је дат простор са мером $((0,10), \mathcal{B}(0,10), \mu)$, где је $\mathcal{B}(0,10) := \{A \cap (0,10) \colon A \in \mathcal{B}\}$, где је $\mathcal{B}$ Борелова σ-алгебра на $\mathbb{R}$, а μ контракција Лебегове мере m на $(0,10)$. Нека даље $f \in L^p((0,10),\mu)$ за фиксирано $p \in (1,+\infty)$. Ако је $\alpha < 2 - \frac{1}{p}$ и функција $g : (0,10) \to \mathbb{R}$ дефинисана са $g(x) := \frac{\sin x}{x^\alpha} f(x)$, доказати да $g \in L^1((0,10),\mu)$.

3. Нека је $E := [0,1] \times [0,1] \times [0,+\infty)$ и нека је дата функција $g : E \to \mathbb{R}$ са $g(x,y,t) := f(x,t)f(y,t)$, при чему је $f(x,y) := \frac{1}{1+x^2y^2}$.

   а) Доказати да је g Лебег-интеграбилна (функција) на E и да важи
   $$I := \int_E g(x,y,t) \, dx \, dy \, dt = \int_{[0,+\infty)} \left(\frac{\operatorname{arctg} t}{t} \right)^2 dt.$$

   б) Доказати да је $I = \frac{\pi}{2} \int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{x+y} \, dx \, dy$.

   в) Израчунати I.

Напомена: Време за израду задатака је 180 минута.

Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - други колоквијум
15.6.2022.

1. Израчунати $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x})^2} \ln x \, dx$.

2. Нека је дат простор са мером $((0,10), \mathcal{B}(0,10), \mu)$, где је $\mathcal{B}(0,10) := \{A \cap (0,10) \colon A \in \mathcal{B}\}$, где је $\mathcal{B}$ Борелова σ-алгебра на $\mathbb{R}$, а μ контракција Лебегове мере m на $(0,10)$. Нека даље $f \in L^p((0,10),\mu)$ за фиксирано $p \in (1,+\infty)$. Ако је $\alpha < 2 - \frac{1}{p}$ и функција $g : (0,10) \to \mathbb{R}$ дефинисана са $g(x) := \frac{\sin x}{x^\alpha} f(x)$, доказати да $g \in L^1((0,10),\mu)$.

3. Нека је $E := [0,1] \times [0,1] \times [0,+\infty)$ и нека је дата функција $g : E \to \mathbb{R}$ са $g(x,y,t) := f(x,t)f(y,t)$, при чему је $f(x,y) := \frac{1}{1+x^2y^2}$.

   а) Доказати да је g Лебег-интеграбилна функција на E и да важи
   $$I := \int_E g(x,y,t) \, dx \, dy \, dt = \int_{[0,+\infty)} \left(\frac{\operatorname{arctg} t}{t} \right)^2 dt.$$

   б) Доказати да је $I = \frac{\pi}{2} \int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{x+y} \, dx \, dy$.

   в) Израчунати I.

Напомена: Време за израду задатака је 180 минута.