Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - други колоквијум
30.5.2023.

1. Израчунати интеграл
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x} e^{-2x}\, dx.$$

2. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и нека су на њему дати низови функција $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

   а) Ако $f_n, g_n \in L^2(X)$ за све $n \in \mathbb{N}$ и важи $f_n \xrightarrow{L^2} 0$ и $g_n \xrightarrow{L^2} 0$, доказати да $f_n g_n \xrightarrow{\mu} 0$ (тј. да низ $\{f_n g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира по мери μ ка 0).

   б) Ако $f_n \in L^2(X)$ и $g_n \in L^3(X)$ за све $n \in \mathbb{N}$ и важи $f_n \xrightarrow{L^2} 0$ и $g_n \xrightarrow{L^3} 0$, да ли тада нужно важи $f_n g_n \xrightarrow{\mu} 0$?

   в) Ако $f_n \to 0$ и $g_n \to 0$ μ скоро свуда, да ли је онда обавезно и $f_n g_n \xrightarrow{\mu} 0$?

3. Посматрајмо простор с мером $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$, при чему су $\mathfrak{M}$ и μ Лебегова σ-алгебра и мера, редом. Дефинишимо на њему низ функција
$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n-k}} \chi_{[k-1,k)}(x).$$
Испитати конвергенцију низа функција $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

   а) μ-скоро свуда.

   б) у $L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ за $p \in [1, +\infty]$.

   в) по мери μ.

Напомена: Време за израду задатака је 135 минута.