Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - испитни рок септембар 2
16.9.2020.

1. а) [5] Нека је X непразан скуп. Дефинисати појам $\sigma-$алгебре $\mathfrak{M}$ на скупу X. Објаснити појам минималне сигма алгебре која садржи неки скуп $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, у ознаци $\mathcal{M}(S)$.

   б) [10] Нека је $X = \mathbb{N}$, $S_1 = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| \text{ је паран број}\}$ и $S_2 = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \max A = 2\}$. Наћи $\mathcal{M}(S_1)$ и $\mathcal{M}(S_2)$.

   в) [5] Испитати да ли је функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(n) = n$, $\mathcal{M}(S_1)$-мерљива. Да ли је она $\mathcal{M}(S_2)$-мерљива?

2. а) [5] Дефиниција мере и транслаторне инваријантности мере на σ-алгебри над $\mathbb{R}$.

   б) [5] Објаснити да ли су Диракова и бројачка мера транслаторно инваријантне.

   в) [5] Нека је $E \subseteq \mathbb{R}$ Лебег мерљив скуп. Да ли је тада $a + E \subseteq \mathbb{R}$ Лебег мерљив?

   г) [5] Показати да је Лебегова мера транслаторно инваријантна.

3. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером.

   а) [5] Показати да је $\int\limits_A f d\mu = 0$ за сваку мерљиву функцију f и скуп A мере нула.

   б) [5] Ако је $f = 0$ скоро свуда, објаснити да ли важи $\int\limits_X f d\mu = 0$.

   в) [5] Ако је $\int\limits_X f d\mu = 0$ и f ненегативна мерљива функција, показати да је $f = 0$ скоро свуда.

   г) [5] Да ли в) важи без претпоставке да је f ненегативна?

4. а) [5] Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $f_n : X \to [0, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, низ мерљивих функција. Објаснити да ли важи $\int\limits_X \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n d\mu$.

   б) [15] Израчунати $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x}\, dx$.

5. Нека је $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером, при чему је $\mathfrak{M}$ Лебегова σ-алгебра, а μ Лебегова мера. Нека је дат низ функција $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са $f_n(x) = n^{\frac{1}{3}} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x)$.

   а) [5] Испитати за које $p \geq 1$ важи $f_n \in L^p(\mathbb{R})$.

   б) [5] Испитати да ли овај низ конвергира μ скоро свуда.

   в) [5] Испитати за које $p \geq 1$ овај низ конвергира у L^p норми.

   г) [5] Испитати да ли овај низ конвергира по мери μ.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.