Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - јун 2
30.6.2023.

1. а) Нека је $(X, \mathfrak{M})$ мерљив простор и μ и ν две мере на њему. Нека је $\lambda(E) = \min\{\mu(E), \nu(E)\}$ за $E \in \mathfrak{M}$. Да ли је λ мера на $(X, \mathfrak{M})$?

   б) Конструисати меру μ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ такву да је $\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = [0,1] \cup [3,4]$.

2. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $f : X \to [0, +\infty]$ је $\mathfrak{M}$-мерљива функција. Доказати да важи

$$\int\limits_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n2^n} \left(\frac{k-1}{2^n} \mu \left(\left\{ x \in X \mid \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \right) \right).$$

3. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{(\sqrt{n}+x)e^x}{1+n^2x^4}\, dx$.

4. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $1 \leqslant p < q < \infty$. За $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$ означимо $\|f\|_* = \|f\|_p + \|f\|_q$.

   а) Доказати да је $\|\cdot\|_*$ норма на $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$.

   б) Доказати да је $(L^p(X) \cap L^q(X), \|\cdot\|_*)$ Банахов простор.

   в) Нека је $p < r < q$. Доказати да је $L^p(X) \cap L^q(X) \subset L^r(X)$ и $\|f\|_r \leqslant \|f\|_*$ за све $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$.

Напомена: Време за израду задатака је 180 минута.

Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - јун 2
30.6.2023.

1. а) Нека је $(X, \mathfrak{M})$ мерљив простор и μ и ν две мере на њему. Нека је $\lambda(E) = \min\{\mu(E), \nu(E)\}$ за $E \in \mathfrak{M}$. Да ли је λ мера на $(X, \mathfrak{M})$?

   б) Конструисати меру μ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ такву да је $\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = [0,1] \cup [3,4]$.

2. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $f : X \to [0, +\infty]$ је $\mathfrak{M}$-мерљива функција. Доказати да важи

$$\int\limits_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n2^n} \left(\frac{k-1}{2^n} \mu \left(\left\{ x \in X \mid \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \right) \right).$$

3. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{(\sqrt{n}+x)e^x}{1+n^2x^4}\, dx$.

4. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $1 \leqslant p < q < \infty$. За $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$ означимо $\|f\|_* = \|f\|_p + \|f\|_q$.

   а) Доказати да је $\|\cdot\|_*$ норма на $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$.

   б) Доказати да је $(L^p(X) \cap L^q(X), \|\cdot\|_*)$ Банахов простор.

   в) Нека је $p < r < q$. Доказати да је $L^p(X) \cap L^q(X) \subset L^r(X)$ и $\|f\|_r \leqslant \|f\|_*$ за све $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$.

Напомена: Време за израду задатака је 180 минута.