Математички факултет, Универзитет у Београду

Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - испитни рок јун 1

26.6.2020.

1. Нека је $X \neq \emptyset$ произвољан скуп.

   а) [3] Дефинисати $\sigma$-алгебру на скупу $X$.

   б) [8] Нека је $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ произвољан скуп. Дефинишимо

   $$\mathfrak{M} = \{B \subseteq X \mid B \subseteq A\} \cup \{B \subseteq X \mid B^{\complement} \subseteq A\}.$$

   Испитати да ли је $\mathfrak{M}$ једна $\sigma$-алгебра на $X$.

   в) [2] Описати $\mathfrak{M}$ у случају $A = X$.

   г) [6] Нека је додатно $A \neq X$. Доказати да је функција $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$

   $$\mu(C) = \begin{cases} 0, & C \subseteq A; \\ k, & C^{\complement} \subseteq A \end{cases}$$

   добро дефинисана и одредити $k \neq 0$ тако да она буда мера.

   д) [4] Објаснити да ли је мера $\mu$ комплетна.

2. а) [3] Дефинисати Лебегову меру.

   б) [10] Ако је $A \subseteq [0,1]$ Лебег мерљив скуп, показати да за свако $\epsilon > 0$ постоји отворен скуп $G$ такав да је $A \subset G$ и $m(G) - m(A) < \epsilon$.

   в) [5] Ако је $A \subseteq [0,1]$ Лебег мерљив скуп, да ли тада важи $m(A) = m(\overline{A})$?

3. Нека је дат простор са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

   а) [8] Ако су $f$ и $g$ мерљиве функције, доказати да су тада $f+g$ и $fg$ мерљиве.

   б) [8] Ако су $f+g$ и $fg$ мерљиве и позитивне фунцкије, да ли су онда и функције $f$, $g$, $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{g}$ и $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ мерљиве?

4. а) [10] Левијев став (формулација и доказ).

   б) [10] Доказати да је

   $$\int_0^{+\infty} \frac{2}{e^{x^2} + e^{-x^2}}\, dx = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

   в) [3] Може ли се задатак б) решити применом Левијевог става?

5. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером. Доказати или оповргнути следећа тврђења

   а) [3] Ако $f \in L^1(X)$, тада $f \in L^3(X)$.

   б) [3] Ако $f \in L^3(X)$, тада $f \in L^1(X)$.

   в) [3] Ако $f \in L^\infty(X)$, тада $f \in L^1(X)$.

   г) [3] Ако је $\mu(X) < +\infty$, тада за $f \in L^1(X)$ важи $f \in L^3(X)$.

   д) [3] Ако је $\mu(X) < +\infty$, тада за $f \in L^3(X)$ важи $f \in L^1(X)$.

   ђ) [5] Ако $f \in L^1(X) \cap L^3(X)$, тада $f \in L^2(X)$.

*Решења*

Наводимо решења само оних задатака чији одговори не постоје у књизи. За све остале одговоре наводимо дефиниције и теореме из књиге аутора проф. др Драгољуба Кечкића. Наравно, ни једно ни друго нису једина решења.

1. а) Дефиниција 2.2., страна 11., трећи део.

   б) $\mathfrak{M}$ јесте $\sigma$-алгебра:

   (1) $\emptyset \in \mathfrak{M}$ зато што је $\emptyset \subseteq A$.

   (2) Нека $B \in \mathfrak{M}$. Треба показати $B^{\complement} \in \mathfrak{M}$. Ако је $B \subseteq A$ онда је $(B^{\complement})^{\complement} = B \subseteq A$, па $B^{\complement} \in \mathfrak{M}$. Ако је $B^{\complement} \subseteq A$ онда тривијално важи $B^{\complement} \in \mathfrak{M}$.

   (3) Нека $B_n \in \mathfrak{M}$, за све $n \in \mathbb{N}$. Треба показати $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{M}$. Ако за све $n \in \mathbb{N}$ важи $B_n \subseteq A$, онда важи и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq A$, па следи $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{M}$. С друге стране, ако постоји неко $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да $B_{n_0}^{\complement} \subset A$, онда следи $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right)^{\complement} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n^{\complement} \subseteq B_{n_0}^{\complement} \subseteq A$, па опет закључујемо $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{M}$.

   в) Ако је $A = X$ онда за сваки скуп $B \subseteq X$ важи $B \subseteq A$, дакле $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathfrak{M}$. Пошто је по дефиницији $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ следи једнакост $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$.

   г) Добра дефинисаност: нека је $C \in \mathfrak{M}$ произвољан скуп. Онда по дефиницији фамилије $\mathfrak{M}$ важи $C \subseteq A$ или $C^{\complement} \subseteq A$. Када би важиле обе инклузије онда би следило $C \cup C^{\complement} = X \subseteq A$, што није тачно по претпоставци задатка. Дакле, сваки скуп $C \in \mathfrak{M}$ задовољава само један услов од два услова по којима је $\mu$ дефинисана. То значи да је $\mu$ добро дефинисана функција. Одредимо $k$ да би $\mu$ била мера. Први услов $\mu(\emptyset) = 0$ важи. Треба још обезбедити

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n),$$

   за произвољне дисјунктне скупове $B_n \in \mathfrak{M}$. Пошто је $\mathfrak{M}$ једна $\sigma$-алгебра, онда важи $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{M}$. Ако је $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq A$, онда је $\mu\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 0$ и због услова $B_n \subset \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq A$ следи и $\mu(B_n) = 0$, за све $n \in \mathbb{N}$. Одатле јасно важи адитивност функције $\mu$, за свако $k$. Претпоставимо сада да је $(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n)^{\complement} \subseteq A$. Дакле, $\mu\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = k$. Приметимо да из ове инклузије следи да постоји $n_1 \in \mathbb{N}$ тако да је $B_{n_1}^{\complement} \subseteq A$, па је $\mu(B_{n_1}) = k$. Нека је $N$ скуп свих $j$ за које је $B_{n_j}^{\complement} \subseteq A$. Тада је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum\limits_{j=1}^{N} \mu(B_j) = Nk$. Да би важила адитивност мере, закључујемо $kN = k$. Покажимо сада $N = 1$. Наиме, ако постоје $n_1$ и $n_2$ такви да је $B_{n_j}^{\complement} \subseteq A$, $j = 1, 2$ онда је и $B_{n_1}^{\complement} \cup B_{n_2}^{\complement} \subseteq A$. Међутим, из услова $B_{n_1} \cap B_{n_2} = \emptyset$ следи $B_{n_1}^{\complement} \cup B_{n_2}^{\complement} = X$. Дакле, $X \subseteq A$, што је немогуће по поставци задатка. Следи, $N = 1$ и $k$ може бити произвољна константа из скупа $(0, +\infty]$.

   д) Нека је $E \in \mathfrak{M}$ произвољан скуп такав да је $\mu(E) = 0$. Треба показати да за свако $F \subseteq E$ важи $F \in \mathfrak{M}$. Пошто је $\mu(E) = 0$, на основу дефиниције мере $\mu$ следи $E \subseteq A$, дакле $F \subseteq A$ па важи $F \in \mathfrak{M}$. Дакле, мера $\mu$ јесте комплетна.

2. а) Дефиниција 2.26. Лебегова мера, страна 28.

   б) Став: апроксимација Лебег мерљивих скупова, став 2.30.а), страна 32.

   в) Не мора да важи. Нека је $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Тада је $m(A) = 0$, док је $m(\overline{A}) = 1$, јер је $\overline{A} = [0, 1]$. Наведимо и још једно могуће решење: Канторов скуп $K$. Знамо да је $m(K) = 0$, а да је он свуда густ у $[0, 1]$, па је $\overline{K} = [0, 1]$, тј. $m(\overline{K}) = 1$.

3. а) Став 3.5.а), страна 41.

б) Нека је $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in V \\ 2, & x \in [0,1]\backslash V \end{cases}$ и $g(x) = \begin{cases} 2, & x \in V \\ 1, & x \in [0,1]\backslash V \end{cases}$, где је $V$ неки Виталијев скуп на $[0,1]$. Тада је $f+g \equiv 3$ и $fg \equiv 2$. Константна функција је Лебег мерљива, па су и $f+g$ и $fg$ Лебег мерљиве, али ни $f$ ни $g$ нису мерљиве. Такође ни $\frac{1}{f}$ нии $\frac{1}{g}$ нису мерљиве. Наиме, да је функција $F = \frac{1}{f}$ мерљива, онда би и $f$ била мерљива као количник мерљивих: константе 1 и функције $F$, тј $f = \frac{1}{F}$.

Са друге стране, пошто је $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{f+g}{fg}$, а количник две мерљиве функције је мерљива функција, следи $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ је мерљива кад год су $f+g$ и $fg$ мерљиве, без обзира на избор функција $f$ и $g$.

4. а) Левијев став 3.25., 60. страна.

б),в) Идеја је да за почетак неку од функција развијемо у ред. Запишимо

$$\frac{2}{e^{x^2}+e^{-x^2}} = \frac{2}{e^{x^2}} \frac{1}{1+e^{-2x^2}}.$$

Но, како је $e^{-2x^2} \leqslant 1$ за $x \in [0,+\infty)$, то можемо применити познати развој

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n.$$

Сада је јасно да је

$$\frac{2}{e^{x^2}+e^{-x^2}} = \frac{2}{e^{x^2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-2nx^2} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)x^2}.$$

У овом делу ћемо одмах прокоментарисати и пример под в). Наиме, овде НЕ МОЖЕ да се примени директно Левијев став, јер је

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \left| 2(-1)^n e^{-(2n+1)x^2} \right| \, dx = +\infty.$$

Ово можемо видети формалним рачуном (сличним оном којим ћемо завршити задатак после размене суме и интеграла) или просто приметивши да ред са десне стране једнакости коју треба да докажемо не конвергира апсолутно. Наравно, у овом случају прибећи ћемо добро познатој последици ТМКа, уочивши низ функција сличан оном који се појављује у доказује Лајбницовог става за алтернирајуће низове. Наиме, уочиемо низ функција

$$f_0(x) = 2\left(e^{-x^2} - e^{-3x^2}\right), \ f_1(x) = 2\left(e^{-5x^2} - e^{-7x^2}\right), \ldots, f_n(x) = 2\left(e^{-(4n+1)x^2} - e^{-(4n+3)x^2}\right), \ldots$$

За овај низ функција важи да је позитиван и опадајући, стога можемо применити ТМК и окренути редослед суме и интеграла. Тада важи

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{+\infty} \frac{2}{e^{x^2+e^{-x^2}}} \, dx &= \int\limits_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(x) \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} 2\left(e^{-(4n+1)x^2} - e^{-(4n+3)x^2}\right) dx \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{4n+1}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{4n+3}} \right) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{4n+1}} - \frac{1}{\sqrt{4n+3}} \right) \\
&= \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}},
\end{aligned}$$

што је и требало доказати. Притом смо користили $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(4n+1)x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{4n+1}}$, што знамо из познатог Ојлеровог интеграла (важи $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$), док последња једнакост следи из чињенице да је крајњи ред конвергентан (а то знамо по Лајбницовом критеријуму), па можемо на овај начин сумирати чланове низа.

5. а) Не мора да важи. Узмимо нпр. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ где је $X = (0,1)$ и $\mu$ Лебегова мера. Тада $f \in L^1(0,1)$ (јер $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ конвергира јер је $\frac{1}{2} < 1$), али $f \notin L^3(0,1)$ (јер $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ не конвергира јер је $\frac{3}{2} > 1$).

б) Не мора да важи. Узмимо опет $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, док је $X = (1,+\infty)$, а $\mu$ Лебегова мера. Тада $f \in L^3(1,\infty)$, али $f \notin L^1(1,\infty)$ (аналогно као у примеру под а), с тим што је сада сингуларитет $+\infty$, а не 0).

в) Не мора да важи. Узмимо нпр. $f \equiv 1$ на скупу $X = (0,\infty)$ и $\mu$ Лебегова мера.

г) Не мора да важи. Исти пример као под а) јер је $\mu(0,1) = 1 < +\infty$.

д) Важи. Наравно, применићемо Хелдерову неједнакост. Наиме, важи следећи низ (не)једнакости

$$\int\limits_X |f|\,d\mu = \int\limits_X |f|\cdot 1\,d\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f|^3\,d\mu\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int\limits_X 1^{\frac{3}{2}}\,d\mu\right)^{\frac{2}{3}} = \|f\|_3\,(\mu(X))^{\frac{2}{3}} < +\infty,$$

јер $f \in L^3$ и $\mu(X) < +\infty$, при чему смо искористили Хелдерову неједнакост са паром коефицијената $\left(3, \frac{3}{2}\right)$.

ђ) Важи. Опет је доказ применом Хелдерове неједнакости. По узору на вежбе, запишимо 2 као линеарну комбинацију 1 и 3: $2 = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 3$. Тада је

$$\int\limits_X |f|^2\,d\mu = \int\limits_X |f|^{\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 3}\,d\mu = \int\limits_X |f|^{\frac{1}{2}}|f|^{\frac{3}{2}}\,d\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f|\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_X |f|^3\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

јер $f \in L^1 \cap L^3$, при чему смо користили Хелдерову неједнакост за пар коефицијената $(2,2)$.