Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - јун 1
13.6.2023.

1. Нека је дат скуп $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и његови подскупови $A_1 = \{1,2,3,4\}$ и $A_2 = \{1,4,7\}$.
   а) Наведи једну полуалгебру на X које садрже скупове A_1 и A_2, а која није алгебра.
   б) Нађи најмању σ-алгебру $\mathfrak{M}$ на скупу X која садржи скупове A_1 и A_2. Колико $\mathfrak{M}$ има елемената?
   в) Доказати да је функција $\mu : \mathfrak{M} \to [0,+\infty]$ са $\mu(E) = \begin{cases} +\infty, \ 2 \in E \\ 11, \ 1 \in E \text{ и } 2 \notin E \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$ мера на $(X, \mathfrak{M})$.
   г) Израчунати, ако постоје, $\mu(\{1,2,3,4,5\})$ и $\mu(\{2,3,7\})$. Да ли је μ комплетна?
2. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^5 \frac{(1+x)^n \cdot e^{-nx}}{\frac{2025}{n} + n(\ln(1+x))^2}\, dx$.
3. Израчунати $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-3x} - e^{-5x}}{x}\, dx$.
4. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером, $f \in L^2(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$ и $A = \{x \in X \mid |f(x)| \geqslant 1\}$.
   а) Доказати да је $\mu(A) < \infty$.
   б) Доказати да функција $g(x) = f(x)\chi_A(x) \in L^1(X,\mu)$ као и да важи $\|g\|_1 \leqslant \|f\|_2 \mu(A)^{\frac{1}{2}}$.
   в) Ако је $p \in [2,\infty]$, доказати да $f \in L^p(X,\mu)$ као и да важи $\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_\infty^p \mu(A) + \|f\|_2^2$.

Напомена: Време за израду задатака је 180 минута.

Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - јун 1
13.6.2023.

1. Нека је дат скуп $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и његови подскупови $A_1 = \{1,2,3,4\}$ и $A_2 = \{1,4,7\}$.
   а) Наведи једну полуалгебру на X које садрже скупове A_1 и A_2, а која није алгебра.
   б) Нађи најмању σ-алгебру $\mathfrak{M}$ на скупу X која садржи скупове A_1 и A_2. Колико $\mathfrak{M}$ има елемената?
   в) Доказати да је функција $\mu : \mathfrak{M} \to [0,+\infty]$ са $\mu(E) = \begin{cases} +\infty, \ 2 \in E \\ 11, \ 1 \in E \text{ и } 2 \notin E \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$ мера на $(X, \mathfrak{M})$.
   г) Израчунати, ако постоје, $\mu(\{1,2,3,4,5\})$ и $\mu(\{2,3,7\})$. Да ли је μ комплетна?
2. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^5 \frac{(1+x)^n \cdot e^{-nx}}{\frac{2025}{n} + n(\ln(1+x))^2}\, dx$.
3. Израчунати $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-3x} - e^{-5x}}{x}\, dx$.
4. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером, $f \in L^2(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$ и $A = \{x \in X \mid |f(x)| \geqslant 1\}$.
   а) Доказати да је $\mu(A) < \infty$.
   б) Доказати да функција $g(x) = f(x)\chi_A(x) \in L^1(X,\mu)$ као и да важи $\|g\|_1 \leqslant \|f\|_2 \mu(A)^{\frac{1}{2}}$.
   в) Ако је $p \in [2,\infty]$, доказати да $f \in L^p(X,\mu)$ као и да важи $\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_\infty^p \mu(A) + \|f\|_2^2$.

Напомена: Време за израду задатака је 180 минута.