Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - испитни рок јун 1
26.6.2020.

1. Нека је $X \neq \emptyset$ произвољан скуп.

   а) [3] Дефинисати σ-алгебру на скупу X.

   б) [8] Нека је $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ произвољан скуп. Дефинишимо
   $$\mathfrak{M} = \{B \subseteq X \mid B \subseteq A\} \cup \{B \subseteq X \mid B^{\complement} \subseteq A\}.$$
   Испитати да ли је $\mathfrak{M}$ једна σ-алгебра на X.

   в) [2] Описати $\mathfrak{M}$ у случају $A = X$.

   г) [6] Нека је додатно $A \neq X$. Доказати да је функција $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$
   $$\mu(C) = \begin{cases} 0, & C \subseteq A; \\ k, & C^{\complement} \subseteq A \end{cases}$$
   добро дефинисана и одредити $k \neq 0$ тако да она буда мера.

   д) [4] Објаснити да ли је мера μ комплетна.

2. а) [5] Дефинисати Лебегову меру.

   б) [8] Ако је $A \subseteq [0,1]$ Лебег мерљив скуп, показати да за свако $\epsilon > 0$ постоји отворен скуп G такав да је $A \subset G$ и $m(G) - m(A) < \epsilon$.

   в) [5] Ако је $A \subseteq [0,1]$ Лебег мерљив скуп, да ли тада важи $m(A) = m(\overline{A})$?

3. Нека је дат простор са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

   а) [8] Ако су f и g мерљиве функције, доказати да су тада $f + g$ и fg мерљиве.

   б) [8] Ако су $f + g$ и fg мерљиве и позитивне фунцкије, да ли су онда и функције f, g, $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{g}$ и $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ мерљиве?

4. а) [10] Левијев став (формулација и доказ).

   б) [10] Доказати да је
   $$\int_0^{+\infty} \frac{2}{e^{x^2} + e^{-x^2}}\, dx = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

   в) [3] Може ли се задатак б) решити применом Левијевог става?

5. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером. Доказати или оповргнути следећа тврђења

   а) [3] Ако $f \in L^1(X)$, тада $f \in L^3(X)$.

   б) [3] Ако $f \in L^3(X)$, тада $f \in L^1(X)$.

   в) [3] Ако $f \in L^\infty(X)$, тада $f \in L^1(X)$.

   г) [3] Ако је $\mu(X) < +\infty$, тада за $f \in L^1(X)$ важи $f \in L^3(X)$.

   д) [3] Ако је $\mu(X) < +\infty$, тада за $f \in L^3(X)$ важи $f \in L^1(X)$.

   ђ) [5] Ако $f \in L^1(X) \cap L^3(X)$, тада $f \in L^2(X)$.