

1. а) Нека су дати скупови $S = \{k \in \mathbb{N} : 2021 \mid k\}$ и $T = \{k \in \mathbb{N} : 2021 \nmid k\}$ и фамилија

$$\mathfrak{M} = \{A, A \cup T \mid A \subseteq S\}.$$

Доказати да је \mathfrak{M} σ -алгебра на скупу \mathbb{N} .

- б) Нека је дата фамилија скупова $\mathcal{E} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = 2021\}$. Наћи минималну σ -алгебру \mathfrak{N} на \mathbb{N} која садржи \mathcal{E} .
- в) Нека је дата произвољна σ -алгебра \mathfrak{B} на \mathbb{N} и функција $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ таква да је $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$. Доказати да је функција f мерљива у односу на σ -алгебру \mathfrak{B} акко је $f^{-1}(\{n\}) \in \mathfrak{B}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.
- г) Испитати мерљивост функција $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ и $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ датих са

$$g(n) = n^3 \text{ и } h(n) = e^n$$

у односу на σ -алгебре \mathfrak{M} и \mathfrak{N} .

2. Теорема о монотonoј конвергенцији. Формулација и доказ у случају ограниченог низа мерљивих функција.

3. а) Нека је (X, \mathfrak{M}, μ) простор са мером и $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ низ мерљивих функција. Објаснити да ли важи

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

- б) Доказати да је $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{x^n}{1-e^{-x}} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{(a+k)^{n+1}}$, где је $a \in (0, 1)$ и $n \in \mathbb{N}$.

4. Нека је $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером, при чему је \mathfrak{M} Лебегова σ -алгебра, а μ Лебегова мера. Нека је дат низ функција $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ са $f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$.

- а) Испитати да ли овај низ конвергира униформно на \mathbb{R} .
- б) Испитати да ли овај низ конвергира μ скоро свуда.
- в) Испитати да ли овај низ конвергира у L^1 норми.
- г) Испитати да ли овај низ конвергира по мери μ .
- д) Испитати да ли из конвергенције у L^1 норми следи конвергенција по мери μ .

(За сваку од наведених конвергенција треба написати и дефиницију.)

Напомена: Сваки задатак вреди 25 поена. Време за израду задатака је 180 минута.