Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р смер) - испитни рок септембар 0
28.8.2021.

1. а) [5] Дефинисати спољну меру.

   б) [10] Показати да је спољна мера субадитивна.

   в) [10] Примером показати да спољна мера не мора бити мера.

   г) [5] Ако је спољна мера скупа једнака нули, показати да тај скуп припада Каратеодоријевој σ-алгебри.

2. а) [5] Нека је дат низ реалних бројева $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Доказати да је са

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty], \quad \mu(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_E(x_n) + \delta_{\frac{20}{81}}(E)$$

   дефинисана мера на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

   б) [6] Доказати да је мера μ коначна за сваки ограничен скуп акко $|x_n| \to +\infty$.

   Нека је надаље $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \frac{5}{4}$.

   в) [6] Наћи $\mu(\mathbb{Q}), \mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ и $\mu(K)$, где је K Канторов скуп.

   г) [5] Да ли постоји ограничен скуп $E \subset \mathbb{R}$, такав да је $\mu(E) = +\infty$?

   д) [6] Израчунати $\int\limits_{[0,1]} s(x)\,d\mu(x)$ и $\int\limits_{[0,1]} f(x)\,d\mu(x)$, где је s Канторова сингуларна функција, а $f(x) = x$.

3. а) [10] Формулисати и доказати Фатуову лему.

   б) [12] Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $f : X \to [0,+\infty]$ мерљива функција таква да је $\int\limits_X f(x)\,dx = c$ где је $c \in (0,+\infty)$. Ако је $\alpha > 0$ константа, доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X n \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) d\mu(x) = \begin{cases} \infty, \text{ако } 0 < \alpha < 1, \\ c, \text{ако } \alpha = 1, \\ 0, \text{ако } \alpha > 1. \end{cases}$$

4. а) [5] Доказати Хелдерову неједнакост.

   б) [5] Ако $f \in L^3(0,+\infty)$, да ли је тада функција $g(x)$ дефинисана са $g(x) = f(x)e^{-2x}$ Лебег интеграбилна на $(0,+\infty)$?

   в) [5] А да ли је функција $f(x)$ нужно Лебег интеграбилна на $(0,+\infty)$?

   г) [5] Да ли су функције f и g нужно есенцијално ограничене на $(0,+\infty)$?

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

Решења:

1. а) Дефиниција 2.21. у књизи (4. недеља на енастави).

   б) Став 2.22. (iv).

   в) Спољна мера μ^* задовољава особину мере $\mu^*(\emptyset) = 0$. Дакле, тражимо пример спољне мере која није адитивна. Нека је $X = \mathbb{R}$. Посматраћемо спољну меру m^* која је придружена Лебеговој мери m на алгебри

$$\mathcal{A} = \{[a_1, b_1) \cup \cdots \cup [a_n, b_n) | -\infty \leq a_1 \leq b_1 < a_2 \leq \cdots \leq b_n \leq \infty, n \in \mathbb{N}\}$$

и дефинисана са

$$m([a_1, b_1) \cup \cdots \cup [a_n, b_n)) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

Придружена спољна мера m^* је дефинисана на свим подскуповима од $\mathbb{R}$. Нека је $V \subset [0, 1]$ произвољан Виталијев скуп. Дефинишимо скупове $E_n = V + r_n$, за све $n \in \mathbb{N}$, при чему су r_n рационални бројеви из интервала $[-1, 1]$. Покажимо

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

Пошто важи

$$[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset [-1, 2],$$

онда на основу монотоности спољне мере m^* и на основу једнакости $m^* = m$ на интервалима, важи

$$1 \leq m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq 3.$$

На основу субадитивности из дела б) следи

$$1 \leq m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

На основу транслаторне инваријантности спољне мере m^* важи $m^*(E_n) = m^*(V + r_n) = m^*(V)$. Дакле,

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) = m^*(V) \sum_{n=1}^{\infty} 1.$$

Следи, $m^*(V) \neq 0$, па је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) = \infty$, док је са друге стране $m^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \leq 3$.

   г) Нека је E произвољан скуп такав да је $\mu^*(E) = 0$. Треба показати да скуп E припада Каратеодоријевој σ-алгебри, тј. да за произвољан скуп $A \subset X$ важи

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Пошто је спољна мера μ^* субадитивна, онда сигурно важи $\leq$. Треба још показати и да важи $\geq$. Из услова $\mu^*(E) = 0$ и монотоности спољне мере, следи $\mu^*(A \cap E) = 0$. Такође, из монотоности и услова $A \cap E^c \subset A$ следи и $\mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$. Дакле,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

2. а) Довољно је доказати да су функције дефинисане са $\mu_1(E) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \chi_E(x_n)$ и $\mu_2(E) = \delta_{\frac{20}{81}}(E)$ мере, јер знамо да је збир две мере мера. μ_2 је позната Дираковa мера. Што се тиче μ_1, имамо да је $\mu_1(\emptyset) = 0$, јер ниједан члан низа не припада празном скупу (дакле сви сабирци у суми су 0). Даље је $\mu_1\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \chi_{\bigsqcup\limits_{k=1}^{+\infty} E_k}(x_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \chi_{E_k}(x_n) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \chi_{E_k}(x_n) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mu_1(E_k)$, при чему смо искористили адитивност по скупу карактеристичне функције, а затим заменили места у суми јер се ради о ненегативним сабирцима. Овим смо доказали да је μ_1 мера, па је самим тим и μ мера.

б) $(\Rightarrow)$ Претпоставимо да је за сваки ограничен скуп E, $\mu(E) < +\infty$. Претпоставимо супротно, да онда не важи да $|x_n| \to +\infty$. Тада постоји неки интервал (a,b) такав да је $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$. Но, тада је $\mu_1((a,b)) = +\infty$ (јер сви чланови низа припадају (a,b), а μ_1 баш мери колико се чланова низа налази у скупу), па је самим тим и $\mu((a,b)) = +\infty$, што је у контрадикцији са претпоставком да је μ коначна за сваки ограничен скуп E.
$(\Leftarrow)$ У другом смеру, ако $|x_n| \to +\infty$, онда узевши произвољан ограничен скуп E, најпре из дефиниције ограниченог скупа имамо да је $E \subset (a,b)$ за неке $a,b \in \mathbb{R}$. Затим, из својства низа x_n, видимо да највише коначно много чланова низа припада (a,b), па самим тим и коначно много њих у E. Дакле, $\mu_1(E) < +\infty$. Наравно, $\mu_2(E) < +\infty$ (може бити 0 или 1). Све о свему, доказали смо да је $\mu(E) < +\infty$ што је и био циљ.

в) Очигледно су сви чланови низа x_n рационални бројеви, па је $\mu(\mathbb{Q}) = +\infty$. Такође, је $\mu_1(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = 0$, а $\frac{20}{81} \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, па је самим тим и $\mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = 0$. Остало је да нађемо меру Канторовог скупа. Приметимо да је $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 1$, док је $x_n > 1$ за $n \geqslant 3$. Наравно, број 1 припада Канторовом скупу, па је остало још да се провери да ли бројеви $\frac{3}{4}$ и $\frac{20}{81}$ припадају. Приметимо да по конструкцији Канторовог скупа (избацивање средње трећине), у четвртом кораку избацујемо интервал $\left(\frac{19}{81}, \frac{20}{81}\right)$, па ће дакле број $\frac{20}{81}$ припадати Канторовом скупу јер руб остаје. Наравно, ово смо могли видети и из чињенице да је $\frac{20}{81} = 0.0202_3$ (број у тернарном запису), па како Канторовом скупу припадају тачно они који у тернарном запису имају само 0 и 2, то $\frac{20}{81} \in K$. Ако покушамо број $\frac{3}{4}$ да запишемо као децимални, добијаћемо редом да је $\frac{3}{4} = 0.202020..._3$. Заиста, можемо се уверити да је $\frac{3}{4} = 0.\overline{20}_3$ из чињенице да је $2\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots) = \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\frac{9}{8} = \frac{3}{4}$. Како се и $\frac{3}{4}$ у тернарном (додуше бесконачном запису) записује само помоћу 0 и 2, то и $\frac{3}{4} \in K$. Све заједно добијамо да је $\mu(K) = 3$.

г) Постоји, нпр. скуп $E = \left[\frac{3}{4}, e - \frac{5}{4}\right]$ садржи све чланове низа x_n, па је $\mu(E) = +\infty$.

д) Из дела под в) видели смо да једини чланови низа x_n који су у скупу $[0,1]$ су $\frac{3}{4}$ и 1. Тиме је по дефиницији интеграла $\int\limits_{[0,1]} s(x)\,d\mu(x) = s\left(\frac{20}{81}\right)\mu(\{\frac{20}{81}\}) + s\left(\frac{3}{4}\right)\mu(\{\frac{3}{4}\}) + s\,(1)\,\mu(\{1\})$. Но, опет из в) знамо да је $\mu(\{\frac{20}{81}\}) = \mu\left(\frac{3}{4}\right)\mu(\{1\}) = 1$, па је $\int\limits_{[0,1]} s(x)\,d\mu(x) = s\left(\frac{20}{81}\right) + s\left(\frac{3}{4}\right) + s(1)$. Знамо да је $s(1) = 1$, док је $s\left(\frac{20}{81}\right)$ најлакше израчунати као $s\left(\frac{20}{81}\right) = s(0.0202_3) = 0.0101_2 = \frac{5}{16}$, где смо овде искористили дефиницију Канторове функције. Слично $s\left(\frac{3}{4}\right) = s(0.\overline{20}_3) = 0.\overline{10}_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \frac{2}{3}$ Дакле, $\int\limits_{[0,1]} s(x)\,d\mu(x) = 1 + \frac{5}{16} + \frac{2}{3} = \frac{95}{48}$. На сличан начин закључујемо да је $\int\limits_{[0,1]} f(x)\,d\mu(x) = f\left(\frac{20}{81}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) = \frac{20}{81} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{647}{324}$.

3. а) Фатуова лема, став 3.20. у књизи (8. недеља на Енастави).

б) Најпре случај $\alpha = 1$ што је најлакши део. Тада је $n\ln\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right) \leqslant n\frac{f(x)}{n} = f(x)$, па имамо интеграбилну доминанту. Дакле, за $\alpha = 1$, по ТДК је

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int\limits_X n\ln\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)d\mu(x) &= \int\limits_X \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)d\mu(x)\\ &= \int\limits_X \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)^n d\mu(x)\\ &= \int\limits_X \lim_{n\to\infty}\ln(e^{f(x)})\,d\mu(x)\\ &= \int\limits_X f(x)\,d\mu(x) = c,\end{aligned}$$

што је и требало доказати. Урадимо сада случај $\alpha \in (0,1)$. Ту ћемо применити горе поменуту Фатуову лему. Имамо да важи

$$\int\limits_X \liminf_{n\to\infty} n\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right)d\mu(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int\limits_X n\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right)d\mu(x).$$

Но, приметимо да је лева страна $+\infty$ јер је

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{f(x)^\alpha}{n^\alpha} = +\infty,$$

јер је $\alpha < 1$. Самим тим је и $\liminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_X n\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right)d\mu(x) = +\infty$, а одатле је и

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X n\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right)d\mu(x) = +\infty,$$

што је и требало доказати.

Преостаје нам још случај $\alpha > 1$. Доказаћемо да је $n\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) \leqslant \alpha f(x)$. Тада бисмо могли да применимо ТДК и добили бисмо

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X n\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right)d\mu(x) = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right)d\mu(x) = 0,$$

јер је $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\frac{f(x)^\alpha}{n^\alpha} = 0$, јер је $\alpha > 1$. Преостаје још да докажемо да је $n\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) \leqslant \alpha f(x)$, што је еквивалентно чињеници да је $\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) \leqslant \alpha\frac{f(x)}{n}$, па заменом $\frac{f(x)}{n} = t \geqslant 0$ постаје довољно да покажемо $\ln(1+t^\alpha) \leqslant \alpha t$ за $\alpha > 1$. Стога, уочимо функцију $g(t) = \ln(1+t^\alpha) - \alpha t$. Приметимо да је $g(0) = 0$, па да бисмо доказали да је $g(t) \leqslant 0$, довољно је да покажемо да је $g'(t) < 0$. Но, $g'(t) = \frac{x^{\alpha-1}\alpha}{1+x^\alpha} - \alpha = \alpha\left(\frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\alpha} - 1\right)$. Дакле треба још доказати да је заграда већа од 0, тј. да је $x^{\alpha-1} < 1 + x^\alpha$. Но, ово је тачно јер је за $x \in [0,1)$ $x^{\alpha-1} < 1$, док је за $x \in [1,+\infty)$ тачно $x^{\alpha-1} \leqslant x^\alpha$, чиме је задатак завршен.

4. а) 4.2. у књизи.

   б) Треба показати $\int\limits_0^\infty |g(x)|dx < \infty$. Важи

$$\int\limits_0^\infty |g(x)|dx = \int\limits_0^\infty |f(x)|e^{-2x}dx \overset{*}{\leq} \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^3dx\right)^{1/3}\left(\int\limits_0^\infty (e^{-2x})^{3/2})dx\right)^{2/3} < \infty,$$

зато што $f \in L^3(0,\infty)$ и $\int\limits_0^\infty e^{-3x}dx = \frac{1}{3}$. Неједнакост $*$ је Хелдерова неједнакост у случају $p = 3$ и $q = 3/2$.

в) Ако $f \in L^3(0,\infty)$, не мора да важи $f \in L^1(0,\infty)$. Пример је функција $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

г) Не мора. На пример $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0,1), \\ 0, & x \in [1,\infty). \end{cases}$ Тада је $\int\limits_0^\infty |f(x)|^3 dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^{3/2}} dx = 3$, па $f \in L^3(0,\infty)$. Али f није есенцијално ограничена. Нека је $M > 1$ произвољна константа. Тада за све $x \in \left(0, \frac{1}{M^2}\right)$ важи $f(x) > M$, а скуп $\left(0, \frac{1}{M^2}\right)$ је увек позитивне мере. Слично, функција $g(x) = f(x)e^{-2x} = \begin{cases} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x}}, & x \in (0,1), \\ 0, & x \in [1,\infty) \end{cases}$ није есенцијално ограничена. Наиме, за $M > 1$ произвољно, за све $x \in \left(0, \frac{1}{e^2M^2}\right)$ важи $g(x) > M$.