Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р смер) - испитни рок јун 1
15.6.2021.

1. а) Нека су дати скупови $S = \{k \in \mathbb{N} \ : \ 2021 \mid k\}$ и $T = \{k \in \mathbb{N} \ : \ 2021 \nmid k\}$ и фамилија

$$\mathfrak{M} = \{A, A \cup T \mid A \subseteq S\}.$$

Доказати да је $\mathfrak{M}$ σ-алгебра на скупу $\mathbb{N}$.

б) Нека је дата фамилија скупова $\mathcal{E} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = 2021\}$. Наћи минималну σ-алгебру $\mathfrak{N}$ на $\mathbb{N}$ која садржи $\mathcal{E}$.

в) Нека је дата произвољна σ-алгебра $\mathfrak{B}$ на $\mathbb{N}$ и функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ таква да је $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$. Доказати да је функција f мерљива у односу на σ-алгебру $\mathfrak{B}$ акко је $f^{-1}(\{n\}) \in \mathfrak{B}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

г) Испитати мерљивост функција $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ датих са

$$g(n) = n^3 \text{ и } h(n) = e^n$$

у односу на σ-алгебре $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

2. Теорема о монотоној конвергенцији. Формулација и доказ у случају ограниченог низа мерљивих функција.

3. а) Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $f_n : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ низ мерљивих функција. Објаснити да ли важи

$$\int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

б) Доказати да је $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{x^n}{1-e^{-x}}\, dx = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{(a+k)^{n+1}}$, где је $a \in (0,1)$ и $n \in \mathbb{N}$.

4. Нека је $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером, при чему је $\mathfrak{M}$ Лебегова σ-алгебра, а μ Лебегова мера. Нека је дат низ функција $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са $f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$.

а) Испитати да ли овај низ конвергира униформно на $\mathbb{R}$.

б) Испитати да ли овај низ конвергира μ скоро свуда.

в) Испитати да ли овај низ конвергира у L^1 норми.

г) Испитати да ли овај низ конвергира по мери μ.

д) Испитати да ли из конвергенције у L^1 норми следи конвергенција по мери μ.

(За сваку од наведених конвергенција треба написати и дефиницију.)

Напомена: Сваки задатак вреди 25 поена. Време за израду задатака је 180 минута.

Решења:

1. а) $\mathfrak{M}$ јесте σ-алгебра јер задовољава својства:
   (1) $\emptyset \in \mathfrak{M}$ јер је $\emptyset \subseteq S$.
   (2) Приметимо да је $S = \mathbb{N} \setminus T$. Узмимо неки $B \in \mathfrak{M}$. Тада је $B = A$ или $B = A \cup T$ за неки $A \subseteq S$. Но, онда је редом $B^c = (S \setminus A) \cup T$ односно $B^c = S \setminus A$, а онда су оба из $\mathfrak{M}$.
   (3) Узмимо сада произвољну фамилију $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}$. Опет је сваки од скупова B_n облика A_n или $A_n \cup T$ за неке $A_n \subseteq S$. Ако су сви првог облика, онда је и њихова унија подскуп од S. Ако постоји бар један другог облика, онда је и унија $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n = C \cup T$ за неки $C \subseteq S$, па се опет налази у $\mathfrak{M}$.

   б) Очигледно је да скупови $A_1 = \{1, 2, \ldots, 2021\}$ и $A_2 = \{2, 3, \ldots, 2022\}$ припадају $\mathcal{E}$. Како је $\mathfrak{N}$ σ-алгебра, то је онда и скуп $\{1\} = A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{N}$. Аналогно се показује да је и $\{n\} \in \mathfrak{N}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Како је $\mathbb{N}$ дисјунктна унија оваквих скупова, а $\mathfrak{N}$ је σ-алгебра, то сваки $A \subseteq \mathbb{N}$ припада σ-алгебри $\mathfrak{N}$, тј. $\mathfrak{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

   в) ($\Longrightarrow$) Ако је f мерљива, тада је по последици са предавања (Енастава шеста недеља) скуп
$$f^{-1}(\{n\}) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = n\} \in \mathfrak{B},$$
јер ово важи за све $c \in \mathbb{R}$, па и за $c \in \mathbb{N}$.
($\Longleftarrow$) Узмимо произвољно $c \in \mathbb{R}$. Тада је скуп
$$\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \leqslant c\} = \bigcup_{n=1}^{[c]} \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = n\},$$
а последњи скуп припада $\mathfrak{B}$ јер је коначна унија скупова из $\mathfrak{B}$. (Наравно, ова сума је празан скуп уколико је $c < 1$.)

   г) Обе функције су мерљиве у односу на σ-алгебру $\mathfrak{N}$ јер је она партитивни скуп. Искористимо (в) за функцију g јер она слика $\mathbb{N}$ у подскуп скупа $\mathbb{N}$. Приметимо да је $g^{-1}(\{1\}) = \{1\}$ а тај скуп не припада $\mathfrak{M}$ јер $1 \notin S$, а не можемо га представити као $A \cup T$, где је $A \subseteq S$. На функцију h не можемо применити део под в), али ако уочимо скуп $\{x \in \mathbb{N} \mid e^n \leqslant e\}$ (дакле за c узмемо e), онда је тај скуп поново $\{1\}$ и не припада $\mathfrak{M}$. Дакле, ни g ни h нису $\mathfrak{M}$-мерљиве, а обе су $\mathfrak{N}$-мерљиве.

2. Час предавања, део из седме недеље са Енаставе (Теорема 3.17. из књиге).

3. а) Важи. У питању је једноставна последица ТМК, позната како са предавања, тако и са вежби. Дакле, уочимо низ функција $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$. Тада је g_n низ мерљивих, растућих, позитивних функција по услову задатка, па на њега можемо применити ТМК. Наиме, важи следећи низ једнакости:
$$\begin{aligned}\int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu &= \int\limits_X \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \, d\mu(x) = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} g_n(x) \, d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x) \, d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \, d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_X f_k(x) \, d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu,\end{aligned}$$

при чему трећа једнакост важи по ТМК, а у четвртој интеграл и суму можемо разменити јер је сума коначна.

б) Довољно је да развијемо функцију $\frac{1}{1-e^{-x}}$ у Тејлоров ред, а затим применимо део под а). Знамо да је

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, \text{ за } x < 1,$$

па је

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx},$$

јер је $e^{-x} \leqslant 1$ за $x \geqslant 0$ (једна тачка не мења ништа у интегралу). Тада је

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{x^n}{1-e^{-x}}\, dx &= \int_0^{+\infty} e^{-ax} x^n \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx}\, dx \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x^n e^{-(a+k)x}\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^n e^{-(a+k)x}\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{a+k}\right)^n e^{-t} \frac{dt}{a+k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+k)^{n+1}} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{(a+k)^{n+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{(a+k)^{n+1}},
\end{aligned}$$

што је и требало доказати. Притом смо у трећој једнакости искористили део под а), у четвртој увели смену $x = \frac{t}{a+k}$, а у шестој и седмој искористили дефиницију Гама функције и њену вредност.

4. а) Приметимо да је

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Пошто је f_n низ непрекидних функција, а гранична функција је прекидна, следи да низ не конвергира равномерно.

б) Овај низ конвергира свуда, тј. за све $x \in \mathbb{R}$, па је скуп где не конвергира празан. Пошто је $\mu(\emptyset) = 0$, следи да низ f_n конвергира μ скоро свуда.

в) Прво треба да проверимо услов $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Важи $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = 2\int\limits_0^{\infty} f_n(x)dx$, пошто је функција f_n парна, за свако $n \in \mathbb{N}$. Дакле, испитујемо конвергенцију несвојственог интеграла само са сингуларитетом у ∞. Приметимо да је $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f_n(x)}{1/x^{2n}} = 1$, а несвојствени интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{2n}}dx$ конвергира за $2n > 1$, што важи за све $n \in \mathbb{N}$. Дакле, на основу другог поредбеног критеријума за интеграле важи и да интеграл $\int\limits_1^\infty f_n(x)dx$ конвергира, па конвергира и интеграл $\int\limits_0^\infty f_n(x)dx$.

Конвергенција у L^1 норми значи (знамо из б) да је то једини кандидат)

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - 0| dx = 0.$$

Израчунаћемо тражени лимес применом ТДК. Наиме важи $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ за све $x \in \mathbb{R}$, па пошто је $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x|_{-\infty}^{\infty} = \pi$, онда је функција $\frac{1}{1+x^2}$ тражена интеграбилна доминанта, па можемо применити ТДК. Следи,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - 0| dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx = 0.$$

(приметимо да је $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)) = 0$ осим у тачки $x = 0$, али Лебегов интеграл у тачки је нула, па не утиче на резултат.

г,д) Из конвергенције у L^1 норми, следи конвергенција по мери μ. (Став 4.23. из књиге; дванаеста недеља са Енаставе)