Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р смер) - испитни рок јануар ПС
22.1.2022.

1. а) [15] Лебег-Стилтјесова мера.
   б) [5] Дати пример функције која не дефинише Лебег-Стилтјесову меру и објаснити.
   в) [5] Објаснити да ли функција $h(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ дефинише Лебег-Стилтјесову меру. Ако да, одредити меру скупа $A = [-1, 1)$.
   г) [5] Дати пример Лебег-Стилтјесове мере у којој скуп $B = [0, 1)$ има меру 10.

2. Нека је дат простор са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и функција $f : X \to \mathbb{R}$.
   а) [5] Ако је f мерљива, објаснити да ли је тада важи $f^{-1}(\{2\}) \in \mathfrak{M}$.
   б) [5] Ако важи $f^{-1}(\{c\}) \in \mathfrak{M}$, за све $c \in \mathbb{R}$, објаснити да ли је тада f мерљива функција.

3. Нека је дат простор са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.
   а) [5] Ако је $f : X \to [0, \infty)$ мерљива функција, показати $\int\limits_X f d\mu \geq 0$.
   б) [5] Ако је $\mu(A) = 0$, показати $\int\limits_A f d\mu = 0$.

4. а) [10] Формулисати и доказати Теорему о доминантној конвергенцији.
   б) [15] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n \frac{n^{\frac{3}{2}}}{2+n^2x^2} \frac{\ln(1+x)\cos x}{x}\, dx$.

5. Дат је низ функција $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са

$$f_n(x) = n\chi_{\left[0, \frac{1}{n^\alpha}\right]}(x),$$

   где је $\alpha > 0$. У зависности од α, испитати конвергенцију низа $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
   а) [7] μ-скоро свуда;
   б) [11] у просторима $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ и $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$;
   в) [7] по мери μ,

   где је μ Лебегова мера на $\mathbb{R}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.