

1. Нека је  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  простор с мером. Нека је  $\mathfrak{N} = \{N \in \mathfrak{M} \mid \mu(N) = 0\}$  и

$$\overline{\mathfrak{M}} = \{A \cup F \mid A \in \mathfrak{M} \text{ и } F \subseteq N, \text{ за неки } N \in \mathfrak{N}\}.$$

а) [3] Доказати да је  $\overline{\mathfrak{M}}$   $\sigma$ -алгебра и да важи  $\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$ .

Дефинишимо  $\bar{\mu}(E) = \mu(A)$ , при чему је  $E = A \cup F$ , где  $A \in \mathfrak{M}$  и  $F \subseteq N$ , за неки  $N \in \mathfrak{N}$ .

б) [3] Доказати да је  $\bar{\mu}$  добро дефинисана функција на  $\overline{\mathfrak{M}}$  и да је  $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$  за све  $A \in \mathfrak{M}$  (тј. да је  $\bar{\mu}$  екстензија мере  $\mu$ ).

в) [3] Доказати да је  $\bar{\mu}$  мера на  $\overline{\mathfrak{M}}$ .

г) [3] Доказати да је мера  $\bar{\mu}$  комплетна.

д) Доказати да је  $\bar{\mu}$  јединствена комплетна екстензија мере  $\mu$ .

ђ) Ако је  $E \in \overline{\mathfrak{M}}$  такав да је  $\bar{\mu}(E) = 0$ , доказати да постоји  $B \in \mathfrak{M}$  такав да је  $\mu(B) = 0$  и  $E \subseteq B$ .

*Примери д) и ђ) су бонус у вредности од 5 поена.*

2. а) [12] Израчунати  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2022} n \cdot e^{\frac{-nx}{1+2021x}} dx$ .

б) [3] Да ли низ функција  $f_n(x) = n \cdot e^{\frac{-nx}{1+2021x}}$  има интегралбилну доминанту на сегменту  $[0, 2022]$ ?

3. [15] Доказати да је

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t-t^2}} dt = (-4) \cdot \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)^2} \right).$$

4. [8] Нека  $f \in L^p([0, 1], m)$  за  $1 < p < +\infty$ , при чему је  $m$  Лебегова мера. Нека је  $q$  такав да је  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Израчунати

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n}{q}} \int_0^{\frac{1}{e^n}} |f| dm.$$

**Напомена:** У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

1. а) Покажимо прво  $\mathfrak{M} \subset \overline{\mathfrak{M}}$ . Нека је  $A \in \mathfrak{M}$  произвољан скуп. Пошто је празан скуп подскуп сваког скупа, онда важи  $\emptyset \subset N$ , за произвољни скуп  $N \in \mathfrak{N}$ . Тада је  $A = A \cup \emptyset \in \overline{\mathfrak{M}}$ .

Покажимо да је  $\overline{\mathfrak{M}}$  једна  $\sigma$ -алгебра:

1)  $\emptyset \in \mathfrak{M} \subset \overline{\mathfrak{M}}$ .

2) Нека је  $E \in \overline{\mathfrak{M}}$  произвољан скуп. Треба показати  $E^c \in \overline{\mathfrak{M}}$ . Пошто је  $E = A \cup F$ , при чему важе претпоставке из поставке задатка, онда је  $A \cup F \subset A \cup N$ , па је  $(A \cup N)^c \subset (A \cup F)^c$ . Важи

$$(A \cup F)^c = (A \cup N)^c \cup ((A \cup F)^c \setminus (A \cup N)^c).$$

Покажимо да ово разлагање задовољава услове за припадност  $\overline{\mathfrak{M}}$ . Прво имамо  $(A \cup N)^c = A^c \cap N^c \in \mathfrak{M}$ . Даље важи  $((A \cup F)^c \setminus (A \cup N)^c) = (A^c \cap F^c) \cap (A \cup N) \subset F^c \cap N \subset N$ . Дакле, ово разлагање задовољава тражене услове, па важи  $E^c \in \overline{\mathfrak{M}}$ .

3) Нека је  $E_n \in \overline{\mathfrak{M}}$ , за све  $n \in \mathbb{N}$ . Треба показати  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \overline{\mathfrak{M}}$ . За свако  $n \in \mathbb{N}$  важи  $E_n = A_n \cup F_n$ , за неко  $A_n \in \mathfrak{M}$  и неко  $F_n \subset N_n$ , где је  $N_n \in \mathfrak{N}$ . Тада важи

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup F_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Пошто је  $\mathfrak{M}$  једна  $\sigma$ -алгебра, онда важи  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$ . Даље, пошто је  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$  и

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) = 0 \text{ онда важи } \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subset \mathfrak{N}. \text{ Дакле, } \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \overline{\mathfrak{M}}.$$

б) Важи  $\bar{\mu}(A) = \bar{\mu}(A \cup \emptyset) = \mu(A)$ . Треба показати још да функција  $\bar{\mu}$  не зависи од избора разлагања скупа  $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ . Дакле, ако је  $E = A_1 \cup F_1 = A_2 \cup F_2$ , за неке скупове  $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$  и скупове  $F_1 \subset N_1, F_2 \subset N_2$ , где  $N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$ , треба показати да је  $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ . Важи  $\mu(A_1 \cup N_1) = \mu(A_1) + \mu(N_1 \setminus A_1) = \mu(A_1)$  и слично  $\mu(A_2 \cup N_2) = \mu(A_2)$ . Даље је  $A_1 \subset A_1 \cup F_1 = A_2 \cup F_2 \subset A_2 \cup N_2$ , па на основу монотоности мере  $\mu$  следи  $\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup N_2) = \mu(A_2)$ . Слично се показује  $\mu(A_2) \leq \mu(A_1 \cup N_1) = \mu(A_1)$ . Дакле,  $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ .

в) 1)  $\bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ .

2) Треба показати  $\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n)$ , за произвољне дисјунктне скупове  $E_n \in \overline{\mathfrak{M}}$ . Пошто је

$E_n = A_n \cup F_n$ , за све  $n \in \mathbb{N}$ , онда је  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ , као што је горе показано. Следи,

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \stackrel{*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n),$$

при чему једнакост  $*$  важи зато што је  $\mu$  мера.

г) Нека је  $E \in \overline{\mathfrak{M}}$  произвољан скуп такав да важи  $\bar{\mu}(E) = 0$ . Треба показати да ако је  $S \subset E$  произвољан подскуп, онда важи и  $S \in \overline{\mathfrak{M}}$ . Посматрамо произвољно разлагање скупа  $E = A \cup F$ , при чему је  $F \subset N$  и  $\mu(N) = 0$ . Пошто је  $A \cup F \subset A \cup N$  и  $\mu(A \cup N) \leq \mu(A) \cup \mu(N) = 0$  онда важи  $A \cup N \in \mathfrak{N}$  па скуп  $E$  можемо разложити и на следећи начин  $E = \emptyset \cup (A \cup F)$ . Тада је

$$S = \emptyset \cup (S \cap (A \cup F))$$

и важи  $S \cap (A \cup F) \subset A \cup F$ , при чему је  $A \cup F \in \mathfrak{N}$ . Дакле,  $S \in \overline{\mathfrak{M}}$ .

д) Претпоставимо да је мера  $\lambda$  комплетна екстензија мере  $\mu$ . Докажимо да је  $\lambda = \bar{\mu}$ . Најпре, како је  $\lambda$  екстензија  $\mu$ , то је  $\lambda(A) = \mu(A)$  за све  $A \in \mathfrak{M}$ . Ако је  $F \subseteq N$  за неки  $N \in \mathfrak{N}$ , тада је  $F = \emptyset \cup F$  па је  $\lambda(F) \leq \lambda(N) = \mu(N) = 0$ , па је  $\lambda(F) = 0$  (овде смо користили да је  $\lambda$  комплетна

мера па можемо измерити  $F$ , као и да се  $\lambda$  и  $\mu$  поклапају на  $N \in \mathfrak{M}$ ). Узмимо сада  $E = A \cup F$ ,  $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ . Тада можемо претпоставити да је  $A \cap F = \emptyset$  (просто, ако нису дисјунктни посматрајмо  $F' = F \setminus A$  уместо  $F$  и поново важи  $A \cup F = A \cup F'$  и све остале претпоставке). Тада је

$$\lambda(E) = \lambda(A \sqcup F) = \lambda(A) + \lambda(F) = \lambda(A) = \mu(A) = \bar{\mu}(E),$$

при чему смо у другој једнакости искористили дефиницију мере, у трећој да се  $\mu$  и  $\lambda$  поклапају на  $\mathfrak{M}$  и у последњој дефиницију  $\bar{\mu}$ . Тиме смо доказали да је  $\lambda = \bar{\mu}$ .

ђ) Представимо  $E \in \overline{\mathfrak{M}}$  као  $E = A \cup F$ , при чему важе претпоставке из поставке задатка. Како је  $0 = \bar{\mu}(E) = \mu(A)$ , то скуп  $A \in \mathfrak{N}$ . За  $B$  је онда довољно узети  $B = A \cup N \in \mathfrak{M}$  (где је  $N \in \mathfrak{M}$  из дефиниције такво да  $F \subseteq N$ ), јер је  $\mu(B) = 0$ .

2. а) Најпре уведемо смену  $nx = t$ . Тада је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2022} n \cdot e^{\frac{-nx}{1+2021x}} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2022n} e^{\frac{-t}{1+2021\frac{t}{n}}} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \chi_{[0,2022n]}(t) e^{\frac{-t}{1+2021\frac{t}{n}}} dt.$$

Приметимо да је  $\frac{t}{n} \leq 2022$  за  $t \in [0, 2022n]$ , па је  $\chi_{[0,2022n]}(t) e^{\frac{-t}{1+2021\frac{t}{n}}} \leq e^{-\frac{t}{1+2021 \cdot 2022}}$ , а

$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{1+2021 \cdot 2022}} dt$  конвергира па смо нашли интегралбилну доминанту и можемо применити ТДК.

Даље је онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2022} n \cdot e^{\frac{-nx}{1+2021x}} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \chi_{[0,2022n]}(t) e^{\frac{-t}{1+2021\frac{t}{n}}} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{[0,2022n]}(t) e^{\frac{-t}{1+2021\frac{t}{n}}} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1,$$

при чему смо искористили да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{[0,2022n]}(t) = 1$  и да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{n} = 0$ .

б) Ако би постојала интегралбилна доминанта, тада би по делу под б) (за прву једнакост) и по ТДК (за другу) важило

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2022} n \cdot e^{\frac{-nx}{1+2021x}} dx = \int_0^{2022} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot e^{\frac{-nx}{1+2021x}} dx = 0,$$

јер за све  $x > 0$  важи да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot e^{\frac{-nx}{1+2021x}} = 0$  јер је експоненцијална функција јача. У тачки  $x = 0$  овај лимес додуше хоће бити бесконачно, али како је једна тачка скуп Лебегове мере нула, то нема утицаја на вредност интеграла. Дакле, низ функција  $f_n(x)$  нема интегралбилну доминанту на сегменту  $[0, 2022]$ .

3. Примена Левијевог става на претходно развијене функције  $\ln t$  и  $(t - t^2)^{\frac{1}{2}}$  у Тејлоров ред.

4. Применимо Хелдерову неједнакост (са коефицијентима  $p$  и  $q$ ) на наведени интеграл записавши

$|f| = |f| \cdot 1$ . Добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n}{q}} \int_0^{\frac{1}{e^n}} |f| dm &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n}{q}} \int_0^{\frac{1}{e^n}} |f| \cdot 1 dm \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n}{q}} \left( \int_0^{\frac{1}{e^n}} |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^{\frac{1}{e^n}} 1^q dm \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n}{q}} \left( \int_0^{\frac{1}{e^n}} |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} e^{-\frac{n}{q}} \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \chi_{(0, \frac{1}{e^n})} |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{(0, \frac{1}{e^n})} |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} = 0, \end{aligned}$$

при чему је улазак лимеса под интеграл дозвољен захваљујући теорему о доминантној конвергенцији, јер је  $\chi_{(0, \frac{1}{e^n})} |f|^p \leq |f|^p$ , а  $\int_0^1 |f|^p dm < +\infty$  јер  $f \in L^p([0, 1], m)$ .