Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р смер) - испитни рок септембар 0
28.8.2021.

1. а) [3] Нека је дат низ реалних бројева $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Доказати да је са

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty], \quad \mu(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_E(x_n) + \delta_{\frac{20}{81}}(E)$$

дефинисана мера на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

б) [3] Доказати да је мера μ коначна за сваки ограничен скуп акко $|x_n| \to +\infty$.

Нека је надаље $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \frac{5}{4}$.

в) [4] Наћи $\mu(\mathbb{Q}), \mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ и $\mu(K)$, где је K Канторов скуп.

г) [3] Да ли постоји ограничен скуп $E \subset \mathbb{R}$, такав да је $\mu(E) = +\infty$?

д) [3+3(БОНУС)] Израчунати $\int\limits_{[0,1]} s(x)\, d\mu(x)$ и $\int\limits_{[0,1]} f(x)\, d\mu(x)$, где је s Канторова сингуларна функција, а $f(x) = x$.

2. [12] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_3^{+\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{x-3}}{n^2}\right) \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \frac{3n^3 \cos\frac{x}{n}}{\sqrt{x-3}\cdot x^3}\, dx$.

3. [10] Израчунати интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx.$$

(Подсетник: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$)

4. а) [6] Ако $f \in L^3(0, +\infty)$, да ли је тада функција $g(x)$ дефинисана са $g(x) = f(x)e^{-2x}$ Лебег интеграбилна на $(0, +\infty)$?

б) [3] А да ли је функција $f(x)$ нужно Лебег интеграбилна на $(0, +\infty)$?

в) [3] Да ли су функције f и g нужно есенцијално ограничене на $(0, +\infty)$?

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

Решења:

1. а) Довољно је доказати да су функције дефинисане са $\mu_1(E)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\chi_E(x_n)$ и $\mu_2(E)=\delta_{\frac{20}{81}}(E)$ мере, јер знамо да је збир две мере мера. μ_2 је позната Диракова мера. Што се тиче μ_1, имамо да је $\mu_1(\emptyset)=0$, јер ниједан члан низа не припада празном скупу (дакле сви сабирци у суми су 0). Даље је $\mu_1\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{+\infty}E_k\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\chi_{\bigsqcup\limits_{k=1}^{+\infty}E_k}(x_n)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\chi_{E_k}(x_n)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\chi_{E_k}(x_n)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mu_1(E_k)$, при чему смо искористили адитивност по скупу карактеристичне функције, а затим заменили места у суми јер се ради о ненегативним сабирцима. Овим смо доказали да је μ_1 мера, па је самим тим и μ мера.

   б) $(\Rightarrow)$ Претпоставимо да је за сваки ограничен скуп E, $\mu(E)<+\infty$. Претпоставимо супротно, да онда не важи да $|x_n|\to+\infty$. Тада постоји неки интервал (a,b) такав да је $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(a,b)$. Но, тада је $\mu_1((a,b))=+\infty$ (јер сви чланови низа припадају (a,b), а μ_1 баш мери колико се чланова низа налази у скупу), па је самим тим и $\mu((a,b))=+\infty$, што је у контрадикцији са претпоставком да је μ коначна за сваки ограничен скуп E.
   $(\Leftarrow)$ У другом смеру, ако $|x_n|\to+\infty$, онда узевши произвољан ограничен скуп E, најпре из дефиниције ограниченог скупа имамо да је $E\subset(a,b)$ за неке $a,b\in\mathbb{R}$. Затим, из својства низа x_n, видимо да највише коначно много чланова низа припада (a,b), па самим тим и коначно много њих у E. Дакле, $\mu_1(E)<+\infty$. Наравно, $\mu_2(E)<+\infty$ (може бити 0 или 1). Све о свему, доказали смо да је $\mu(E)<+\infty$ што је и био циљ.

   в) Очигледно су сви чланови низа x_n рационални бројеви, па је $\mu(\mathbb{Q})=+\infty$. Такође, је $\mu_1(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=0$, а $\frac{20}{81}\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, па је самим тим и $\mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=0$. Остало је да нађемо меру Канторовог скупа. Приметимо да је $x_1=\frac{3}{4}$, $x_2=1$, док је $x_n>1$ за $n\geqslant 3$. Наравно, број 1 припада Канторовом скупу, па је остало још да се провери да ли бројеви $\frac{3}{4}$ и $\frac{20}{81}$ припадају. Приметимо да по конструкцији Канторовог скупа (избацивање средње трећине), у четвртом кораку избацујемо интервал $\left(\frac{19}{81},\frac{20}{81}\right)$, па ће дакле број $\frac{20}{81}$ припадати Канторовом скупу јер руб остаје. Наравно, ово смо могли видети и из чињенице да је $\frac{20}{81}=0.0202_3$ (број у тернарном запису), па како Канторовом скупу припадају тачно они који у тернарном запису имају само 0 и 2, то $\frac{20}{81}\in K$. Ако покушамо број $\frac{3}{4}$ да запишемо као децимални, добијаћемо редом да је $\frac{3}{4}=0.202020\ldots_3$. Заиста, можемо се уверити да је $\frac{3}{4}=0.\overline{20}_3$ из чињенице да је $2\frac{1}{3}+2\frac{1}{3^3}+\cdots=\frac{2}{3}(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots)=\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\frac{9}{8}=\frac{3}{4}$. Како се и $\frac{3}{4}$ у тернарном (додуше бесконачном запису) записује само помоћу 0 и 2, то и $\frac{3}{4}\in K$. Све заједно добијамо да је $\mu(K)=3$.

   г) Постоји, нпр. скуп $E=\left[\frac{3}{4},e-\frac{5}{4}\right]$ садржи све чланове низа x_n, па је $\mu(E)=+\infty$.

   д) Из дела под в) видели смо да једини чланови низа x_n који су у скупу $[0,1]$ су $\frac{3}{4}$ и 1. Тиме је по дефиницији интеграла $\int\limits_{[0,1]}s(x)\,d\mu(x)=s\left(\frac{20}{81}\right)\mu(\{\frac{20}{81}\})+s\left(\frac{3}{4}\right)\mu(\{\frac{3}{4}\})+s\left(1\right)\mu(\{1\})$. Но, опет из в) знамо да је $\mu(\{\frac{20}{81}\})=\mu\left(\frac{3}{4}\right)\mu(\{1\})=1$, па је $\int\limits_{[0,1]}s(x)\,d\mu(x)=s\left(\frac{20}{81}\right)+s\left(\frac{3}{4}\right)+s(1)$. Знамо да је $s(1)=1$, док је $s\left(\frac{20}{81}\right)$ најлакше израчунати као $s\left(\frac{20}{81}\right)=s(0.0202_3)=0.0101_2=\frac{5}{16}$, где смо овде искористили дефиницију Канторове функције. Слично $s\left(\frac{3}{4}\right)=s(0.\overline{20}_3)=0.\overline{10}_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots=\frac{2}{3}$ Дакле, $\int\limits_{[0,1]}s(x)\,d\mu(x)=1+\frac{5}{16}+\frac{2}{3}=\frac{95}{48}$. На сличан начин закључујемо да је $\int\limits_{[0,1]}f(x)\,d\mu(x)=f\left(\frac{20}{81}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)=\frac{20}{81}+\frac{3}{4}+1=\frac{647}{324}$.

2. Овде ћемо применити ТДК. Приметимо да важе следеће оцене: $\left|\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x-3}}{n^2}\right)}{\frac{\sqrt{x-3}}{n^2}}\right|\leqslant 1$, $|\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)|\leqslant\frac{x}{n}$ и $|\cos\frac{x}{n}|\leqslant 1$, па можемо закључити да је

$$\left|\sin\left(\frac{\sqrt{x-3}}{n^2}\right)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\frac{3n^3\cos\frac{x}{n}}{\sqrt{x-3}\cdot x^3}\right|\leqslant\frac{3}{x^2},$$

а $g(x)$ јесте интеграбилна доминанта јер је $\int\limits_3^{+\infty} \frac{3}{x^2}\,dx = 1$. Дакле, по ТДК можемо закључити да је

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_3^{+\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{x-3}}{n^2}\right) \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \frac{3n^3\cos\frac{x}{n}}{\sqrt{x-3}\cdot x^3}\,dx = \int\limits_3^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{x-3}}{n^2}\right) \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \frac{3n^3\cos\frac{x}{n}}{\sqrt{x-3}\cdot x^3}\,dx,$$

но и сам лимес подинтегралне функције налази се једноставно узимајући у обзир да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x-3}}{n^2}\right)}{\frac{\sqrt{x-3}}{n^2}} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{n} = 1,$$

тј. имамо да је

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_3^{+\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{x-3}}{n^2}\right) \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \frac{3n^3\cos\frac{x}{n}}{\sqrt{x-3}\cdot x^3}\,dx = \int\limits_3^{+\infty} \frac{3}{x^2}\,dx = 1.$$

3. Овде ћемо применити последицу ТМК. Запишимо у облику реда

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{e^x(1-e^{-x})} = e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x(n+1)},$$

где смо користили да је $\frac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n$ за $|t|<1$ што је легитимно јер је $t = e^{-x}$ за $x \geqslant 0$ (једна тачка не представља проблем). Тада је

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x-1}\,dx &= \int\limits_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)x}x^3\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-(n+1)x}x^3\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t^3}{(n+1)^3}\frac{dt}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^4}\Gamma(4) = 6\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^4} = 6\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = 6\cdot\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15},
\end{aligned}$$

при чему друга једнакост следи на основу последице ТМК, јер је $f_n(x) = e^{-(n+1)x}x^3$ позитивна функција за $x \geqslant 3$, у трећој смо увели смену $t = (n+1)x$, а у четвртој искористили дефиницију Гама функције

4. а) Треба показати $\int\limits_0^{\infty} |g(x)|dx < \infty$. Важи

$$\int\limits_0^{\infty} |g(x)|dx = \int\limits_0^{\infty} |f(x)|e^{-2x}dx \overset{*}{\leq} \left(\int\limits_0^{\infty} |f(x)|^3 dx\right)^{1/3} \left(\int\limits_0^{\infty} (e^{-2x})^{3/2})dx\right)^{2/3} < \infty,$$

зато што $f \in L^3(0,\infty)$ и $\int\limits_0^{\infty} e^{-3x}dx = \frac{1}{3}$. Неједнакост $*$ је Хелдерова неједнакост у случају $p=3$ и $q = 3/2$.

б) Ако $f \in L^3(0,\infty)$, не мора да важи $f \in L^1(0,\infty)$. Пример је функција $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

в) Не мора. На пример $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0,1), \\ 0, & x \in [1,\infty). \end{cases}$ Тада је $\int\limits_0^\infty |f(x)|^3 dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^{3/2}} dx = 3$, па $f \in L^3(0,\infty)$. Али f није есенцијално ограничена. Нека је $M > 1$ произвољна константа. Тада за све $x \in \left(0, \frac{1}{M^2}\right)$ важи $f(x) > M$, а скуп $\left(0, \frac{1}{M^2}\right)$ је увек позитивне мере. Слично, функција $g(x) = f(x)e^{-2x} = \begin{cases} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x}}, & x \in (0,1), \\ 0, & x \in [1,\infty) \end{cases}$ није есенцијално ограничена. Наиме, за $M > 1$ произвољно, за све $x \in \left(0, \frac{1}{e^2 M^2}\right)$ важи $g(x) > M$.