Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Л смер) - испитни рок јун 1
15.6.2021.

1. [16 поена]

   а) Нека су дати скупови $S = \{k \in \mathbb{N} \ : \ 2021 \mid k\}$ и $T = \{k \in \mathbb{N} \ : \ 2021 \nmid k\}$ и фамилија
   $$\mathfrak{M} = \{A, A \cup T \mid A \subseteq S\}.$$
   Доказати да је $\mathfrak{M}$ σ-алгебра на скупу $\mathbb{N}$.

   б) Нека је дата фамилија скупова $\mathcal{E} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = 2021\}$. Наћи минималну σ-алгебру $\mathfrak{N}$ на $\mathbb{N}$ која садржи $\mathcal{E}$.

   в) Нека је дата произвољна σ-алгебра $\mathfrak{B}$ на $\mathbb{N}$ и функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ таква да је $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$. Доказати да је функција f мерљива у односу на σ-алгебру $\mathfrak{B}$ акко је $f^{-1}(\{n\}) \in \mathfrak{B}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

   г) Испитати мерљивост функција $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ датих са
   $$g(n) = n^3 \text{ и } h(n) = e^n$$
   у односу на σ-алгебре $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

[БОНУС] [5 поена] Описати све $\mathfrak{M}$-мерљиве функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

2. [6 поена] Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $E \in \mathfrak{M}$. Доказати да за сваки подскуп $A \subseteq X$ важи
   $$\mu(E \cap A) + \mu(E \cup A) = \mu(E) + \mu(A).$$

3. [14 поена] Доказати да је $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{x^n}{1-e^{-x}} \, dx = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{(a+k)^{n+1}}$, где је $a \in (0, 1)$ и $n \in \mathbb{N}$.

4. [14 поена] Нека је $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером, при чему је $\mathfrak{M}$ Лебегова σ-алгебра, а μ Лебегова мера. Нека је дат низ функција $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са $f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$.

   а) Испитати да ли овај низ конвергира униформно на $\mathbb{R}$.

   б) Испитати да ли овај низ конвергира μ скоро свуда.

   в) Испитати да ли овај низ конвергира у L^1 норми.

   г) Испитати да ли овај низ конвергира по мери μ.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.