

1. [16 поена]

а) Нека су дати скупови  $S = \{k \in \mathbb{N} : 2021 \mid k\}$  и  $T = \{k \in \mathbb{N} : 2021 \nmid k\}$  и фамилија

$$\mathfrak{M} = \{A, A \cup T \mid A \subseteq S\}.$$

Доказати да је  $\mathfrak{M}$   $\sigma$ -алгебра на скупу  $\mathbb{N}$ .

б) Нека је дата фамилија скупова  $\mathcal{E} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = 2021\}$ . Наћи минималну  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{N}$  на  $\mathbb{N}$  која садржи  $\mathcal{E}$ .

в) Нека је дата произвољна  $\sigma$ -алгебра  $\mathfrak{B}$  на  $\mathbb{N}$  и функција  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  таква да је  $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ . Доказати да је функција  $f$  мерљива у односу на  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{B}$  акко је  $f^{-1}(\{n\}) \in \mathfrak{B}$  за свако  $n \in \mathbb{N}$ .

г) Испитати мерљивост функција  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  датих са

$$g(n) = n^3 \text{ и } h(n) = e^n$$

у односу на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{N}$ .

[БОНУС ] [5 поена] Описати све  $\mathfrak{M}$ -мерљиве функције  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

2. [6 поена] Нека је  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  простор са мером и  $E \in \mathfrak{M}$ . Доказати да за сваки подскуп  $A \subseteq X$  важи

$$\mu(E \cap A) + \mu(E \cup A) = \mu(E) + \mu(A).$$

3. [14 поена] Доказати да је  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{x^n}{1-e^{-x}} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{(a+k)^{n+1}}$ , где је  $a \in (0, 1)$  и  $n \in \mathbb{N}$ .

4. [14 поена] Нека је  $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$  простор са мером, при чему је  $\mathfrak{M}$  Лебегова  $\sigma$ -алгебра, а  $\mu$  Лебегова мера. Нека је дат низ функција  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  са  $f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$ .

а) Испитати да ли овај низ конвергира униформно на  $\mathbb{R}$ .

б) Испитати да ли овај низ конвергира  $\mu$  скоро свуда.

в) Испитати да ли овај низ конвергира у  $L^1$  норми.

г) Испитати да ли овај низ конвергира по мери  $\mu$ .

**Напомена:** У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

1. а)  $\mathfrak{M}$  јесте  $\sigma$ -алгебра јер задовољава својства:

(1)  $\emptyset \in \mathfrak{M}$  јер је  $\emptyset \subseteq S$ .

(2) Приметимо да је  $S = \mathbb{N} \setminus T$ . Узмимо неки  $B \in \mathfrak{M}$ . Тада је  $B = A$  или  $B = A \cup T$  за неки  $A \subseteq S$ . Но, онда је редом  $B^c = (S \setminus A) \cup T$  односно  $B^c = S \setminus A$ , а онда су оба из  $\mathfrak{M}$ .

(3) Узмимо сада произвољну фамилију  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}$ . Опет је сваки од скупова  $B_n$  облика  $A_n$  или  $A_n \cup T$  за неке  $A_n \subseteq S$ . Ако су сви првог облика, онда је и њихова унија подскуп од  $S$ .

Ако постоји бар један другог облика, онда је и унија  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = C \cup T$  за неки  $C \subseteq S$ , па се опет налази у  $\mathfrak{M}$ .

б) Очигледно је да скупови  $A_1 = \{1, 2, \dots, 2021\}$  и  $A_2 = \{2, 3, \dots, 2022\}$  припадају  $\mathcal{E}$ . Како је  $\mathfrak{N}$   $\sigma$ -алгебра, то је онда и скуп  $\{1\} = A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{N}$ . Аналогно се показује да је и  $\{n\} \in \mathfrak{N}$  за све  $n \in \mathbb{N}$ . Како је  $\mathbb{N}$  дисјунктна унија оваквих скупова, а  $\mathfrak{N}$  је  $\sigma$ -алгебра, то сваки  $A \subseteq \mathbb{N}$  припада  $\sigma$ -алгебри  $\mathfrak{N}$ , тј.  $\mathfrak{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

в) ( $\implies$ ) Ако је  $f$  мерљива, тада је по последици са предавања скуп

$$f^{-1}(\{n\}) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = n\} \in \mathfrak{B},$$

јер ово важи за све  $c \in \mathbb{R}$ , па и за  $c \in \mathbb{N}$ .

( $\impliedby$ ) Узмимо произвољно  $c \in \mathbb{R}$ . Тада је скуп

$$\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \leq c\} = \bigcup_{n=1}^{[c]} \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = n\},$$

а последњи скуп припада  $\mathfrak{B}$  јер је коначна унија скупова из  $\mathfrak{B}$ . (Наравно, ова сума је празан скуп уколико је  $c < 1$ .)

г) Обе функције су мерљиве у односу на  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{N}$  јер је она партитивни скуп. Искористимо (в) за функцију  $g$  јер она слика  $\mathbb{N}$  у подскуп скупа  $\mathbb{N}$ . Приметимо да је  $g^{-1}(\{1\}) = \{1\}$  а тај скуп не припада  $\mathfrak{M}$  јер  $1 \notin S$ , а не можемо га представити као  $A \cup T$ , где је  $A \subseteq S$ . На функцију  $h$  не можемо применити део под в), али ако уочимо скуп  $\{x \in \mathbb{N} \mid e^n \leq e\}$  (дакле за  $c$  узмемо  $e$ ), онда је тај скуп поново  $\{1\}$  и не припада  $\mathfrak{M}$ . Дакле, ни  $g$  ни  $h$  нису  $\mathfrak{M}$ -мерљиве, а обе су  $\mathfrak{N}$ -мерљиве.

2. Приметимо да је  $\mu(E \cup A) = \mu(E) + \mu(A \setminus E)$ , јер је  $E \cup A = E \sqcup (A \setminus E)$ . Тада је

$$\mu(E \cup A) + \mu(E \cap A) = \mu(E) + \mu(A \setminus E) + \mu(A \cap E) = \mu(E) + \mu(A),$$

при чему смо у последњој једнакости искористили да су  $A \setminus E$  и  $A \cap E$  дисјунктни скупови чија је унија  $A$ . Тим је задатак завршен.

3. Довољно је да развијемо функцију  $\frac{1}{1-e^{-x}}$  у Тејлоров ред, а затим применимо део под а). Знамо да је

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, \text{ за } x < 1,$$

па је

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx},$$

јер је  $e^{-x} \leq 1$  за  $x \geq 0$  (једна тачка не мења ништа у интегралу). Тада је

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{x^n}{1-e^{-x}} dx &= \int_0^{+\infty} e^{-ax} x^n \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x^n e^{-(a+k)x} dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^n e^{-(a+k)x} dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{a+k}\right)^n e^{-t} \frac{dt}{a+k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+k)^{n+1}} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{(a+k)^{n+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{(a+k)^{n+1}}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. Притом смо у трећој једнакости искористили последицу ГМК, у четвртој увели смену  $x = \frac{t}{a+k}$ , а у шестој и седмој искористили дефиницију Гама функције и њену вредност.

4. а) Приметимо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Пошто је  $f_n$  низ непрекидних функција, а гранична функција је прекидна, следи да низ не конвергира равномерно.

б) Овај низ конвергира свуда, тј. за све  $x \in \mathbb{R}$ , па је скуп где не конвергира празан. Пошто је  $\mu(\emptyset) = 0$ , следи да низ  $f_n$  конвергира  $\mu$  скоро свуда.

в) Прво треба да проверимо услов  $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Важи  $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f_n(x) dx$ , пошто је функција  $f_n$  парна, за свако  $n \in \mathbb{N}$ . Дакле, испитујемо конвергенцију несвојственог интеграла само са сингуларитетом у  $\infty$ . Приметимо да је  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{1/x^{2n}} = 1$ , а несвојствени интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2n}} dx$  конвергира за  $2n > 1$ , што важи за све  $n \in \mathbb{N}$ . Дакле, на основу другог поредбеног критеријума за интеграле важи и да интеграл  $\int_1^{\infty} f_n(x) dx$  конвергира, па конвергира и интеграл  $\int_0^{\infty} f_n(x) dx$ .

Конвергенција у  $L^1$  норми значи (знамо из б) да је то једини кандидат)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - 0| dx = 0.$$

Изрчунаћемо тражени лимес применом ТДК. Наиме важи  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$  за све  $x \in \mathbb{R}$ , па пошто је  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} = \arctg x|_{-\infty}^{\infty} = \pi$ , онда је функција  $\frac{1}{1+x^2}$  тражена интеграбилна доминанта, па

можемо применити ТДК. Следи,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - 0| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0.$$

(приметимо да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  осим у тачки  $x = 0$ , али Лебегов интеграл у тачки је нула, па не утиче на резултат.

г) Из конвергенције у  $L^1$  норми, следи конвергенција по мери  $\mu$ . (Став 4.23. из књиге)