

1. [16 поена]

а) Нека су дати скупови $S = \{k \in \mathbb{N} : 2021 \mid k\}$ и $T = \{k \in \mathbb{N} : 2021 \nmid k\}$ и фамилија

$$\mathfrak{M} = \{A, A \cup T \mid A \subseteq S\}.$$

Доказати да је \mathfrak{M} σ -алгебра на скупу \mathbb{N} .

б) Нека је дата фамилија скупова $\mathcal{E} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = 2021\}$. Наћи минималну σ -алгебру \mathfrak{N} на \mathbb{N} која садржи \mathcal{E} .

в) Нека је дата произвољна σ -алгебра \mathfrak{B} на \mathbb{N} и функција $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ таква да је $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$. Доказати да је функција f мерљива у односу на σ -алгебру \mathfrak{B} акко је $f^{-1}(\{n\}) \in \mathfrak{B}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

г) Испитати мерљивост функција $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ и $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ датих са

$$g(n) = n^3 \text{ и } h(n) = e^n$$

у односу на σ -алгебре \mathfrak{M} и \mathfrak{N} .

[БОНУС] [5 поена] Описати све \mathfrak{M} -мерљиве функције $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

2. [6 поена] Нека је (X, \mathfrak{M}, μ) простор са мером и $E \in \mathfrak{M}$. Доказати да за сваки подскуп $A \subseteq X$ важи

$$\mu(E \cap A) + \mu(E \cup A) = \mu(E) + \mu(A).$$

3. [14 поена] Доказати да је $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{x^n}{1-e^{-x}} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{(a+k)^{n+1}}$, где је $a \in (0, 1)$ и $n \in \mathbb{N}$.

4. [14 поена] Нека је $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером, при чему је \mathfrak{M} Лебегова σ -алгебра, а μ Лебегова мера. Нека је дат низ функција $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ са $f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$.

а) Испитати да ли овај низ конвергира униформно на \mathbb{R} .

б) Испитати да ли овај низ конвергира μ скоро свуда.

в) Испитати да ли овај низ конвергира у L^1 норми.

г) Испитати да ли овај низ конвергира по мери μ .

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

1. а) \mathfrak{M} јесте σ -алгебра јер задовољава својства:

(1) $\emptyset \in \mathfrak{M}$ јер је $\emptyset \subseteq S$.

(2) Приметимо да је $S = \mathbb{N} \setminus T$. Узмимо неки $B \in \mathfrak{M}$. Тада је $B = A$ или $B = A \cup T$ за неки $A \subseteq S$. Но, онда је редом $B^c = (S \setminus A) \cup T$ односно $B^c = S \setminus A$, а онда су оба из \mathfrak{M} .

(3) Узмимо сада произвољну фамилију $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}$. Опет је сваки од скупова B_n облика A_n или $A_n \cup T$ за неке $A_n \subseteq S$. Ако су сви првог облика, онда је и њихова унија подскуп од S .

Ако постоји бар један другог облика, онда је и унија $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = C \cup T$ за неки $C \subseteq S$, па се опет налази у \mathfrak{M} .

б) Очигледно је да скупови $A_1 = \{1, 2, \dots, 2021\}$ и $A_2 = \{2, 3, \dots, 2022\}$ припадају \mathcal{E} . Како је \mathfrak{N} σ -алгебра, то је онда и скуп $\{1\} = A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{N}$. Аналогно се показује да је и $\{n\} \in \mathfrak{N}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Како је \mathbb{N} дисјунктна унија оваквих скупова, а \mathfrak{N} је σ -алгебра, то сваки $A \subseteq \mathbb{N}$ припада σ -алгебри \mathfrak{N} , тј. $\mathfrak{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

в) (\implies) Ако је f мерљива, тада је по последици са предавања скуп

$$f^{-1}(\{n\}) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = n\} \in \mathfrak{B},$$

јер ово важи за све $c \in \mathbb{R}$, па и за $c \in \mathbb{N}$.

(\impliedby) Узмимо произвољно $c \in \mathbb{R}$. Тада је скуп

$$\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \leq c\} = \bigcup_{n=1}^{[c]} \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = n\},$$

а последњи скуп припада \mathfrak{B} јер је коначна унија скупова из \mathfrak{B} . (Наравно, ова сума је празан скуп уколико је $c < 1$.)

г) Обе функције су мерљиве у односу на σ -алгебру \mathfrak{N} јер је она партитивни скуп. Искористимо (в) за функцију g јер она слика \mathbb{N} у подскуп скупа \mathbb{N} . Приметимо да је $g^{-1}(\{1\}) = \{1\}$ а тај скуп не припада \mathfrak{M} јер $1 \notin S$, а не можемо га представити као $A \cup T$, где је $A \subseteq S$. На функцију h не можемо применити део под в), али ако уочимо скуп $\{x \in \mathbb{N} \mid e^n \leq e\}$ (дакле за c узмемо e), онда је тај скуп поново $\{1\}$ и не припада \mathfrak{M} . Дакле, ни g ни h нису \mathfrak{M} -мерљиве, а обе су \mathfrak{N} -мерљиве.

2. Приметимо да је $\mu(E \cup A) = \mu(E) + \mu(A \setminus E)$, јер је $E \cup A = E \sqcup (A \setminus E)$. Тада је

$$\mu(E \cup A) + \mu(E \cap A) = \mu(E) + \mu(A \setminus E) + \mu(A \cap E) = \mu(E) + \mu(A),$$

при чему смо у последњој једнакости искористили да су $A \setminus E$ и $A \cap E$ дисјунктни скупови чија је унија A . Тим је задатак завршен.

3. Довољно је да развијемо функцију $\frac{1}{1-e^{-x}}$ у Тејлоров ред, а затим применимо део под а). Знамо да је

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, \text{ за } x < 1,$$

па је

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx},$$

јер је $e^{-x} \leq 1$ за $x \geq 0$ (једна тачка не мења ништа у интегралу). Тада је

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{x^n}{1-e^{-x}} dx &= \int_0^{+\infty} e^{-ax} x^n \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x^n e^{-(a+k)x} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^n e^{-(a+k)x} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{a+k}\right)^n e^{-t} \frac{dt}{a+k} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+k)^{n+1}} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{(a+k)^{n+1}} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{(a+k)^{n+1}},
 \end{aligned}$$

што је и требало доказати. Притом смо у трећој једнакости искористили последицу ГМК, у четвртој увели смену $x = \frac{t}{a+k}$, а у шестој и седмој искористили дефиницију Гама функције и њену вредност.

4. а) Приметимо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Пошто је f_n низ непрекидних функција, а гранична функција је прекидна, следи да низ не конвергира равномерно.

б) Овај низ конвергира свуда, тј. за све $x \in \mathbb{R}$, па је скуп где не конвергира празан. Пошто је $\mu(\emptyset) = 0$, следи да низ f_n конвергира μ скоро свуда.

в) Прво треба да проверимо услов $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Важи $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f_n(x) dx$, пошто је функција f_n парна, за свако $n \in \mathbb{N}$. Дакле, испитујемо конвергенцију несвојственог интеграла само са сингуларитетом у ∞ . Приметимо да је $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{1/x^{2n}} = 1$, а несвојствени интеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2n}} dx$ конвергира за $2n > 1$, што важи за све $n \in \mathbb{N}$. Дакле, на основу другог поредбеног критеријума за интеграле важи и да интеграл $\int_1^{\infty} f_n(x) dx$ конвергира, па конвергира и интеграл $\int_0^{\infty} f_n(x) dx$.

Конвергенција у L^1 норми значи (знамо из б) да је то једини кандидат)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - 0| dx = 0.$$

Изрчунаћемо тражени лимес применом ТДК. Наиме важи $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ за све $x \in \mathbb{R}$, па пошто је $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} = \arctg x|_{-\infty}^{\infty} = \pi$, онда је функција $\frac{1}{1+x^2}$ тражена интегрална доминанта, па

можемо применити ТДК. Следи,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - 0| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0.$$

(приметимо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ осим у тачки $x = 0$, али Лебегов интеграл у тачки је нула, па не утиче на резултат.

г) Из конвергенције у L^1 норми, следи конвергенција по мери μ . (Став 4.23. из књиге)