Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Л смер) - испитни рок јануар ПС
22.1.2022.

1. Дати су скупови $X = \{1, 2, 3, 4\}$ и $Y = \{2020, 2021, 2022, 2023\}$ и функција $g : X \to Y$ дата са $g(1) = 2023, g(2) = 2020$ и $g(3) = g(4) = 2022$.

   а) [4] Наћи минималну σ-алгебру $\mathfrak{M}$ генерисану са $\{g^{-1}\{2020\}, g^{-1}\{2021\}, g^{-1}\{2022\}, g^{-1}\{2023\}\}$. Колико $\mathfrak{M}$ има елемената?

   б) [6] Нека су дате функције $f_1, f_2, f_3 : X \to \mathbb{R}$ са $f_1(x) = \operatorname{sgn} x$, $f_2(x) = 4 - x$ и $f_3(x) = x \pmod 3$ (остатак при дељењу x са 3). Испитати $\mathfrak{M}$-мерљивост ових функција, као и $\mathfrak{M}$-мерљивост функције $f_2 + f_3$.

   в) [2] Дати пример једне мере μ на $(X, \mathfrak{M})$ такве да је $\mu(X) = 1$ и μ није комплетна.

2. [12] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n \frac{n^{\frac{3}{2}}}{2+n^2x^2} \frac{\ln(1+x)\cos x}{x}\, dx$.

3. [12] Доказати да важи следећа једнакост:

$$\int_0^1 \frac{(x\ln x)^2}{1+x^2}\, dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}.$$

4. Дат је низ функција $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са

$$f_n(x) = n\chi_{\left[0, \frac{1}{n^\alpha}\right]}(x),$$

   где је $\alpha > 0$. У зависности од α, испитати конвергенцију низа $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

   а) [4] μ-скоро свуда;

   б) [6] у просторима $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ и $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$;

   в) [4] по мери μ,

   где је μ Лебегова мера на $\mathbb{R}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.