

Писмени испит из Анализе 1 - 3.9.2022.

1. а) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{1}{1-x^2}e^{-x^2}$.
б) Одредити све локалне екстремуме функције $g(x) = 1 - f(x-1)$.
2. а) Доказати да једначина $\ln(1+x) + nx = 5$ има јединствено решење за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$.
б) Означимо са a_n , где је n фиксиран природан број, решење једначине из дела а) и формирајмо низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Доказати да је $a_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и да је $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ строго опадајући низ.
в) Доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
г) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$.
3. Нека је дата функција $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
а) Одредити домен функције f и доказати да је $f(x) = \arctg x$ за свако x из тог домена.
б) Одредити једначину тангенте на график функције f у тачки чија је x -координата $\sqrt{3}$.
в) Одредити површину дела равни у првом квадранту ограниченог том тангентом, графиком функције f и y -осом.
4. а) Испитати конвергенцију редова $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln n}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln n}$ и $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.
б) Доказати да ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{\ln n}$ дивергира.
в) Доказати да ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln n}$ условно конвергира.
г) Одредити полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln n} x^n$.