

1. Нека је дата функција $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} e^{\frac{1}{x}}$.

а) Наћи константе $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ тако да важи:

$$f(x) = a_1x + b_1 + \frac{c_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ када } x \rightarrow +\infty$$

$$f(x) = a_2x + b_2 + \frac{c_2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ када } x \rightarrow -\infty$$

б) Испитати ток и скицирати график функције f .

в) Да ли постоји тангента на график функције f која пролази кроз координатни почетак?

г) Ако је $g(x) = -f(x - 2)$, скицирати график функције g .

2. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна функција таква да је $f(0) = f(1) = 0$ и $\int_0^1 f^2(x) dx = 1$.

а) Израчунати $\int_0^1 xf(x)f'(x) dx$.

б) Нека је $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x tf(t)f'(t) dt$. Доказати да постоји $\xi \in [0, 1]$ такво да је $|F''(\xi)| \geq 1$.

3. Нека је $I_n = \int_0^{\frac{1}{n}} x \arcsin x dx$, $n \in \mathbb{N}$.

а) Израчунати I_n за све $n \in \mathbb{N}$.

б) Наћи Маклоренов полином реда 3 функције \arcsin .

в) Нека је $a_n = n^3 I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Испитати конвергенцију низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ако постоји.

4. а) Испитати конвергенцију интеграла $\int_1^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^{2022}}\right) dx$.

б) Испитати условну и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\int_1^n \ln \left(1 + \frac{1}{x^{2022}}\right) dx}{\sqrt[2022]{n}}$.