① $f(x) = x + \frac{e}{\log\frac{x+2e-1}{2} - 2}$

Домен: $x+2e-1>0 \wedge \frac{1}{2}(x+2e-1) \neq e^2$

$\Leftrightarrow x > 1-2e \wedge x \neq 2e^2-2e+1$

$D = (1-2e, 2e^2-2e+1) \cup (2e^2-2e+1, +\infty)$

Асимптотика:

$\lim_{x\to 1-2e} f(x) = 1-2e<0$

$\lim_{x\to 2e^2-2e+1-0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 2e^2-2e+1+0} f(x)=+\infty$

$f(x)-x = \frac{e}{\log\frac{x+2e-1}{2}-2} \to 0, x\to+\infty$, па је

закључак:

- $x=2e^2-2e+1$ је вертикална асимптота
- $y=x$ је коса асимптота

Први извод:

$$f'(x) = 1 - \frac{e}{(x+2e-1)\left(\log\frac{x+2e-1}{2}-2\right)^2}$$

Знак првог извода и монотоност ћемо испитати након анализе другог извода.

Други извод:

$$f''(x) = \frac{e\log\left(\frac{x+2e-1}{2}\right)}{(x+2e-1)^2\left(\log\frac{x+2e-1}{2}-2\right)^3}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \log\frac{x+2e-1}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=3-2e}$

асно је да је

$f''(x)>0$ за $x>2e^2-2e+1$, као и за

ако $x < 3-2e$, док је $f''(x)<0$ за $3-2e<x<2e^2-2e+1$.

Дакле, f је конвексна на $(\overset{1-2e}{\cancel{+\infty}}, 3-2e)$ и $(2e^2-2e+1, +\infty)$, а конкавна на $(3-2e, 2e^2-2e+1)$.

Одавде закључујемо и да f' опада на $(3-2e, 2e^2-2e+1)$, а расте на $(\overset{1-2e}{\cancel{+\infty}}, 3-2e)$ и $(2e^2-2e+1, +\infty)$. Како је

$$\lim_{x\to 1-2e+} f'(x) = 1-\frac{e}{\lim\limits_{x\to 1-2e+} (x+2e-1)(\log^2-4\log+4)}$$

аргумент логаритма је $\frac{x+2e-1}{2}$ и тежи нули ($t\log t \to 0-$, $t\to 0+$)

$$1-\frac{e}{0+}=-\infty;$$

$$f'(3-2e) = 1-\frac{e}{2\left(\log\frac{3-2e+2e-1}{2}-2\right)^2}$$

$$=1-\frac{e}{8}>0$$

$$\lim_{x\to 2e^2-2e+1} f'(x) = 1-\frac{e}{2e^2(0+)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$$

закључујемо:

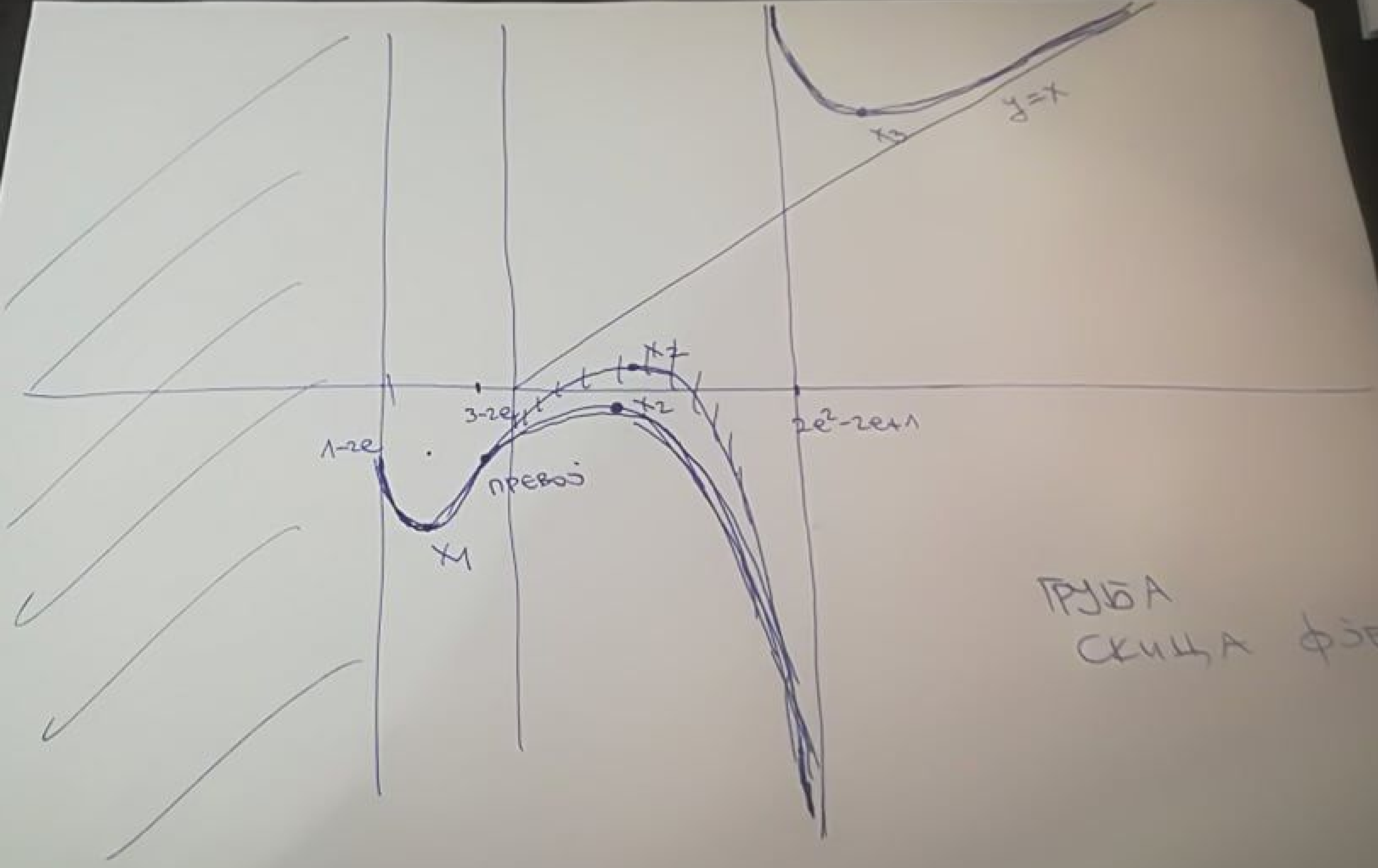
f' има нулу $x_1\in(1-2e, 3-2e)$ и

нулу $x_2\in(3-2e, 2e^2-2e+1)$, као и $x_3\in(2e^2-2e+1, +\infty)$.

$f'(x)>0$ за ~~[illegible] $x\in(x_1,x_2)$~~ $x\in(x_1,x_2)$ и $(x_3,+\infty)$, док је $f'(x)<0$ за $x\in(1-2e, x_1)$ и $x\in(x_2, \cancel{x_3})$.

Зато f има локалне минимуме у $x=x_1$ и $x=x_3$ и локални максимум у $x=x_2$. f опада на $(1-2e, x_1)$ и (x_2, x_3), а расте на (x_1, x_2) и $(x_3,+\infty)$.

Апсолутних нема (има вертикалну асимпту и $f(x)\to\pm\infty$.)



ГРУБА
СКИЦА ФЈЕ

2. АНАЛИЗА 1

3) $\int_0^{2\pi} \frac{x\cdot\sin x}{2+|\cos x|}dx = \left[\begin{array}{l} t=x-\pi\\ dt=dx\\ \begin{array}{c|c|c} x&0&2\pi\\ \hline t&-\pi&\pi\end{array}\end{array}\right] =$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(t+\pi)\sin(t+\pi)}{2+|\cos(t+\pi)|}dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{(t+\pi)(-\sin t)}{2+|\cos t|}dt$

$= -\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{t\sin t}{2+|\cos t|}}_{\text{парна подинтегрална ф-ја}}dt - \pi\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{\sin t}{2+|\cos t|}}_{\text{непарна подинтегрална ф-ја}}dt =$

$= -2\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{2+|\cos t|}dt = -2\left(\int_0^{\pi/2}\frac{t\sin t}{2+\cos t}dt + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{t\sin t}{2-\cos t}dt\right)$

$= -2\int_0^{\pi/2}\frac{t\sin t}{2+\cos t}dt - 2\underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{t\sin t}{2-\cos t}dt}_{I_2} = \#$

2 : $-2\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{t\sin t}{2-\cos t}dt = \left[\begin{array}{l}x=t-\pi\\ dx=dt\\ \begin{array}{c|c|c}t&\pi/2&\pi\\ \hline x&-\pi/2&0\end{array}\end{array}\right] =$

$-2\int_{-\pi/2}^{0}\frac{(x+\pi)\sin(x+\pi)}{2-\cos(x+\pi)}dx = -2\int_{-\pi/2}^{0}\frac{(x+\pi)(-\sin x)}{2+\cos x}dx =$

$2\int_{-\pi/2}^{0}\underbrace{\frac{x\sin x}{2+\cos x}}_{\text{парна под. ф-ја}}dx + 2\pi\int_{-\pi/2}^{0}\frac{\sin x}{2+\cos x}dx = 2\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{2+\cos x}dx + 2\pi\int_{-\pi/2}^{0}\frac{\sin x}{2+\cos}$

$-2\int_0^{\pi/2}\cancel{\frac{t\sin t}{2+\cos t}}dt + 2\int_0^{\pi/2}\cancel{\frac{t\sin t}{2+\cos t}}dt + 2\pi\int_{-\pi/2}^{0}\frac{\sin t}{2+\cos t}dt =$

$2\pi\int_{-\pi/2}^{0}\frac{d(-\cos t)}{2+\cos t} = -2\pi\ln(2+\cos t)\Big|_{-\pi/2}^{0} =$

$= -2\pi(\ln 3-\ln 2) = -2\pi\ln\frac{3}{2}$

3. АНАЛИЗА 1

Дат је низ реалних бројева $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, са $a_1 =$
$a_{n+1} = \ln(1+\operatorname{arctg}(a_n))$, за $n \geq 1$

а) Посматрајмо ф-ју $f(x) = \ln(1+\operatorname{arctg}(x))$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{arctg}x} \cdot \frac{1}{1+x^2} > 0, \text{ за } \forall x \in D_f$$

Тада је ф-ја растућа;

Посматрајмо даље, $a_1 = 1$

$$a_2 = \ln(1+\operatorname{arctg}a_1) =$$
$$= \ln\left(1+\frac{\pi}{4}\right) < a_1$$

$\Rightarrow$ Низ је опадајући.

Покажимо, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$

Математичка индукција:

(база индукције) $n=1$: $a_1 = 1 > 0$

(индуктивна хипотеза) $a_n > 0$

(индуктивни корак) $a_{n+1} = \ln(\underbrace{1+\underbrace{\operatorname{arctg}(\underbrace{a_n}_{>0})}_{>0}}_{>1}) > 0$

Низ је ограничен и монотон

$\Rightarrow$ конвергентан

$\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, из

$$a_{n+1} = \ln(1+\operatorname{arctg}(a_n)) \;/ \lim_{n\to+\infty}$$
$$a = \ln(1+\operatorname{arctg}a) / e$$
$$e^a = 1+\operatorname{arctg}a$$
$$\Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

б) $a_n \sim C n^{\alpha}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{Cn^{\alpha}} = 1$, тј. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n^{\beta}}{C_1 \cdot n} = 1$, за $\beta = \frac{1}{\alpha}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n^{\beta}}{C_1 \cdot n} \underset{\text{Штолц}}{=} \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}^{\beta} - a_n^{\beta}}{C_1(n+1-n)} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln(1+\mathrm{arctg}\, a_n))^{\beta} - a_n^{\beta}}{C_1} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{C_1} \cdot (\ln(1+a_n+o(a_n))^{\beta} - a_n^{\beta}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{C_1} \cdot (a_n + \frac{a_n^2}{2} + o(a_n))^{\beta} - a_n^{\beta}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{C_1} \cdot (a_n(1 - \frac{1}{2} a_n + o(1)))^{\beta} - a_n^{\beta}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{C_1} (a_n^{\beta} (1 - \frac{1}{2} a_n + o(1))^{\beta} - a_n^{\beta}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{C_1} (a_n^{\beta} (1 - \frac{\beta}{2} a_n + o(a_n)) - a_n^{\beta}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{C_1} \cdot (\cancel{a_n^{\beta}} - \frac{\beta}{2} a_n^{\beta+1} + o(a_n^{\beta+1}) - \cancel{a_n^{\beta}}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{C_1} \cdot (-\frac{\beta}{2} a_n^{\beta+1} + o(a_n^{\beta+1})) = 1$$

$$\Rightarrow \beta + 1 = 0$$

$$\beta = -1 \Rightarrow \alpha = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{C_1} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow a_n \sim \frac{2}{n}, \ n \to +\infty$$

в) Испитати апсолутну и условну конвергенцију
$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}} \cos a_n$

Уочимо, $\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$ је монотон и $\lim_{n\to+\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\Rightarrow$ Према Лајбницу $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$ конвергира.

$\cos a_n$ – монотоно расте и $|\cos a_n| \le 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}} \cos a_n$ конвергира по Абелу

Испитајмо апсолутну конвергенцију:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}} \cos a_n\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}} \cos a_n$$

$\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, n\to+\infty$, $a_n \sim \frac{2}{n}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$\cos a_n \sim 1$

$\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \cos a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ дивергира

$\Rightarrow$ Ред апсолутно дивергира, условно конверг.

г) Наћи све $x \in \mathbb{R}$, за које конвергира ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, Уочили смо под а) $a_n \sim \frac{2}{n}$

Нађимо радијус конвергенције степеног реда:

1. начин:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\operatorname{arctg}(a_n))}{a_n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+a_n+o(a_n))}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n+o(a_n)}{a_n} = 1$$

2. начин

Користећи под б)

Област конвергенције степеног реда је за $x \in (-1, 1)$.

Испитајмо за $x = -1$ и $x = 1$:

$x = 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot 1^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, с обзиром да је

Б: $a_n \sim cn^\alpha$] , $a_n \sim \frac{2}{n}$, како ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}$ диве

дивергира и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n$, како из дела а) низ је монотон и $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ према Лајбницу да ред конвергира.

Дакле, ред конвергира за $\forall x \in [-1, 1)$.

④ Дати услов можемо записати као

$$\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx - 2\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)dx = 0$$

Стога, уочимо ф-ју

$$F(x) = \int_0^{\frac{x}{3}} f(t)dt + \int_{\frac{2x}{3}}^{x} f(t)dt - 2\int_{\frac{x}{3}}^{\frac{2x}{3}} f(t)dt$$

$F(0) = F(1) \overset{\frown}{=} 0$ из услова

$$F'(x) = \frac{1}{3}f\left(\frac{x}{3}\right) + f(x) - \frac{2}{3}f\left(\frac{2x}{3}\right) - \frac{4}{3}f\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{2}{3}f\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$= f\left(\frac{x}{3}\right) + f(x) - 2f\left(\frac{2x}{3}\right)$$

$$= \left(f(x) - f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) - \left(f\left(\frac{2x}{3}\right) - f\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$

По Роловој теореми, постоји $\xi \in (0,1)$ такав да је $F'(\xi) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\left(f(\xi) - f\left(\frac{2\xi}{3}\right)\right) - \left(f\left(\frac{2\xi}{3}\right) - f\left(\frac{\xi}{3}\right)\right) = 0} \quad (*)$$

Лагранж: $\exists\, x_1 \in \left(\frac{2\xi}{3}, \xi\right)$ и ф-ју f

$$\frac{f(\xi) - f\left(\frac{2\xi}{3}\right)}{\xi - \frac{2\xi}{3}} = f'(x_1) \Rightarrow f(\xi) - f\left(\frac{2\xi}{3}\right) = f'(x_1) \cdot \frac{\xi}{3}$$

(#)

Лагранж: $\exists\, x_2 \in \left(\frac{\xi}{3}, \frac{2\xi}{3}\right)$

$$\frac{f\left(\frac{2\xi}{3}\right) - f\left(\frac{\xi}{3}\right)}{\frac{2\xi}{3} - \frac{\xi}{3}} = f'(x_2) \Rightarrow f\left(\frac{2\xi}{3}\right) - f\left(\frac{\xi}{3}\right) = f'(x_2) \cdot \frac{\xi}{3}$$

Убацимо (#) у (*) и добијемо

$$f'(x_1) \cdot \frac{\xi}{3} - f'(x_2) \cdot \frac{\xi}{3} = 0 \quad / : \frac{\xi}{3} \neq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_1) = f'(x_2)$$

Како је f' непрекидна на $[x_1, x_2]$ и диференцијабилна на (x_1, x_2) по Ролу постоји

$$\boxed{f''(x_0) = 0}$$ q.e.d.

⑤ Ако постоји $x_0 \in [0,\frac{1}{2}]$ т.д. $f''(x_0) \geq 4$ крај.

$\Rightarrow f''(x) < 4$ за све $x \in [0,\frac{1}{2}]$

непрекидна

Лагранж: $\dfrac{f'(x) - \overset{=0}{f'(0)}}{x-0} = f''(\xi_x) < 4$

$\Rightarrow \boxed{f'(x) < 4x \quad , x \in (0,\frac{1}{2}]}$

$\Rightarrow f(\frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} f'(t)dt < 4\int_0^{\frac{1}{2}} t\,dt = 4\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}}$

Сад је циљ да направимо „исту" ф-ју око 1 $\Rightarrow \check{g}(x) = f(1-x)$ $\quad \check{g}(0) = 1$

$\check{g}(1) = 0$

Даље, транслацијо:

$\check{g}'(x) = -f'(1-x)$

$g(x) = 1 - f(1-x) \rightarrow$ оне

$\check{g}'(0) = \check{g}'(1) = 0$

задовољава $g(0) = 0, \; g(1) = 1 \; , g'(0) = g'(1) = 0$

Ако је $g''(x) \leq 4$ за све $x \in [0,\frac{1}{2}] \Rightarrow g(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1 - f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$ ↯ $\Rightarrow \underline{\exists\, \tilde{x}_0 \in [0,\frac{1}{2}]}$

$g''(\tilde{x}_0) \geq 4 \Rightarrow -f''(1-\tilde{x}_0) \geq 4 \Rightarrow f''(1-\tilde{x}_0) \leq -4$

$\Rightarrow x_0 = 1 - \tilde{x}_0 \in [\frac{1}{2}, 1] \Rightarrow f''(x_0) \leq -4$

$\Rightarrow |f''(x_0)| \geq 4$