Лопиталова правила, Тејлорова формула и примене

1 Теоријски увод

Теорема [Лопиталова правила]: Нека су $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ диференцијабилне функције и a тачка нагомилавања скупа A. Ако важи један од следећа два услова:
(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или
(2) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$,
тада из $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$, следи да је $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$.
Теорема [Лајбницово правило]: Ако су функције f и g n пута диференцијабилне, онда је таква и функција fg и важи

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Дефиниција [Асимптотске релације]: Нека су функције $f, g : A \to \mathbb{R}$ и $a \in A'$. Дефинишимо следеће релације:
(1) $f(x) = o(g(x))$, кад $x \to a$, ако за све $\varepsilon > 0$ постоји околина U тачке a тако да за све $x \in A$ важи $x \in U \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$.
(2) $f(x) = O(g(x))$, кад $x \to a$, ако постоји $M > 0$ и околина U тачке a тако да за све $x \in A$ важи $x \in U \Rightarrow |f(x)| \leq M|g(x)|$.
(3) $f(x) \asymp g(x)$, кад $x \to a$, ако је $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ кад $x \to a$.
(4) $f(x) \sim g(x)$, кад $x \to a$, ако је $f(x) - g(x) = o(g(x))$ кад $x \to a$.
Дефиниција [Тејлоров полином]: Тејлоров полином n пута диференцијабилне функције f, степена n у тачки a је

$$T_{n,a}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Теорема [Тејлорова формула са остатком у Пеановом облику]: Нека је f n пута диференцијабилна у тачки a. Тада је

$$f(x) = T_{n,a}(f)(x) + o((x-a)^n).$$

Напомена: Постоје и неки други облици остатака попут Кошијевог и Шлемлих-Рошовог, али треба посебно остаћи Лагранжов. Лагранжов облик остатка је дат са $\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, где је ξ између x и a, при чему је f $n+1$ пута диференцијабилна.
Дефиниција [Маклоренов полином]: Тејлоров полином за $a = 0$ назива се Маклоренов.
У задацима ће нам он бити од посебног значаја, па наводимо следећих 5 основних облика:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\ x \to 0;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),\ x \to 0;$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),\ x \to 0;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n),\ x \to 0;$$

2 Задаци

1. Доказати да за асимптотске релације важе следећ својства:
(1) $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x)),\ x \to a$;
(2) $o(g(x)) \cdot o(h(x)) = o(g(x) \cdot h(x)),\ x \to a$;
(3) $o(x^2) = o(x^3),\ x \to +\infty$;
(4) $o(x^5) = o(x^2),\ x \to 0$;
(5) $o(f(x)) = O(f(x)),\ x \to a$;
(6) $o(o(f(x))) = o(f(x)),\ x \to a$;
(7) $o(x^n) + o(x^m) = o(x^k),\ x \to 0$, где је $k = min\{m, n\}$.

2. Ако $x \to 0$, доказати да важи:
(1) $2x - x^2 = O(x)$;
(2) $x \sin \sqrt{x} = O(x^{\frac{3}{2}})$;
(3) $x \sin \frac{1}{x} = O(|x|)$;
(4) $\log x = o(\frac{1}{x^\varepsilon})$, за све $\varepsilon > 0$;
(5) $\arctan \frac{1}{x} = O(1)$.

3. Ако $x \to +\infty$, доказати да важи:
(1) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$;
(2) $\frac{x+1}{x^2+1} = O(\frac{1}{x})$;
(3) $\frac{\arctan x}{1-x^2} = O(\frac{1}{x^2})$;
(4) $\log x = o(x^\varepsilon)$, за све $\varepsilon > 0$;
(5) $x^p e^{-x} = o(\frac{1}{x^2})$, за свако $p \in \mathbb{R}$.

4. Представити функцију $f(x) = x^3 - 3x + 2$ у облику: $f(x) = c(x-1)^\alpha + o((x-1)^\alpha),\ x \to 1$.

5. Представити функцију $f(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$ у облику $f(x) = c(x-1)^\alpha + o((x-1)^\alpha),\ x \to 1$.

6. Развити e^{2x-x^2} до петог стпена кад $x \to 0$.

7. Развити $\log(\cos x)$ до шестог степена кад $x \to 0$.

8. Развити $\tan x$ до петог степена кад $x \to 0$.

9. Нека је $f(x) = \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$ за $x \in (0, \frac{\pi}{3})$. Наћи $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ и испитати равномерну непрекидност функције f на $(0, \frac{\pi}{3})$.

10. Представити $\log \frac{\sin x}{x}$ у облику $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + o(x^4),\ x \to 0$.

11. Представити $\cos x$ у облику $\frac{1+\alpha x + \beta x^2}{1 + \gamma x + \delta x^2}$, за неке $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ кад $x \to 0$.

12. Израчунати $\lim\limits_{n \to +\infty} n \left(\frac{\sqrt[n]{e}+1}{\sqrt[n]{e}-1} - 2n \right)$.

13. Израчунати $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)$.

14. Одредити све $a, b \in \mathbb{R}$ за које је $\lim\limits_{n \to +\infty} n\sqrt{n}(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2})$ коначан број различит од нуле.

15. Израчунати $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p}$ у зависности од параметра $p \in \mathbb{R}$.

16. Израчунати $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+\cos x)^{1-\cos x} - 1}{(\log(1+x))^2}$.

17. Израчунати $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x$.

18. Израчунати $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\tan x}{x} + (\frac{\sin x}{x})^2 - 2}{x^2 \tan^2 x}$.

19. У зависности од параметара $a, b \in \mathbb{R}$ одредити $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \cdot (\sqrt{x(x+4)} \cdot e^{\frac{1}{x}} - ax - b) \right)$

20. Нека је функција дефинисана са $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^4} \cdot \left(e^{\sin x} - (1+x)^{\frac{2x+2}{x+2}}\right), \ x \in (-1,0) \cup (0,+\infty) \\ a, \ x = 0 \end{cases}$

(1) Одредити $a \in \mathbb{R}$, тако да функција f буде непрекидна.
(2) Испитати диференцијабилност функције f за тако добијено a.

21. Одредити реалне параметре $a, b \in \mathbb{R}$ тако да функција $f(x) = \begin{cases} a^{\frac{\sqrt{\sin x^2 - x^3}}{x}}, \ x < 0 \\ b, \ x = 0 \\ x^{x^2}, \ x > 0 \end{cases}$

буде непрекидна на $\mathbb{R}$. За тако добијене $a, b \in \mathbb{R}$, испитати диференцијабилност функције f.

22. Ако је $f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$, наћи $f^{(2017)}(x)$.

23. Нека је $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и $f(x) = (1-x)^{-y} e^{-yx}$. Доказати да је

$$(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+yx)f^{(n)}(x) - nyf^{(n-1)}(x) = 0$$

за $x \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$.