Анализа 1, 2020/2021. КОНСУЛТАЦИЈЕ - задаци из претходних година
Ток 103 5. фебруар 2021.

1. [Први колоквијум 2020.] Одредити инфимум и супремум следећих скупова:

   а)
$$A = \left\{ \frac{m^2 - n}{m^2 + n^2} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N}, m > n \right\}.$$

   б) Скупа B тачака у којима тангента на функцију $x^2 e^x$ не сече негативни део x-осе.

   в)
$$C = A \cdot B = \{x \cdot y \mid x \in A, y \in B\}.$$

2. [Први колоквијум 2020.] Одредити граничну вредност низа чији је општи члан
$$a_n = n^4 \left(\sin \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} \right),$$
а потом израчунати
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \cdots + n \cdot a_n}{n^2}.$$

3. [Јун 2 2020.] Дата је диференцијабилна функција $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ за коју важи да је $|g'(x)| \leqslant q < 1$. Нека је $x_0 \in [a, b]$ произвољно и низ реалних бројева дефинисан са $x_{n+1} = g(x_n)$.

   а) Показати да је:
$$\left| \frac{g(x_n) - g(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \right| \leqslant q.$$

   б) Доказати да низ x_n конвергира.

   в) Доказати да постоји јединствено $\xi \in [a, b]$ такво да је $g(\xi) = \xi$.

4. [Септембар 3 2020.] Дата је непрекидна функција $g : [0, 1] \to [0, 1]$ таква да је $g(0) = 0, g(1) = 1$ и за свако $x \in (0, 1)$ важи $g(x) \neq x$.

   а) Доказати да је за свако $x \in (0, 1)$ $g(x) > x$ или је за свако $x \in (0, 1)$ $g(x) < x$.

   б) Доказати да низ формиран са $x_0 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = g(x_n)$ конвергира.

5. [Септембар 1 2020.] Ако за узастопне чланове реалног растућег низа $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ важи неједнакост
$$a_{n+1} \leqslant \log \frac{(n^2 + 1) e^{a_n}}{n^2},$$
испитати конвергенцију то низа.

6. [Јун 1 2020. (део задатка)]

   а) У зависности од реалних параметара a и c испитати непрекидност функције:
$$f(x) = \begin{cases} ax + \sqrt[3]{2x - 1}, & x \in \left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right] \\ c \arcsin \frac{2}{2x+3}, & x \notin \left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right] \end{cases}.$$

   б) Испитати диференцијабилност функције f.

7. [Јун 1, 2020.] Дата је непрекидно-диференцијабилна функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, таква да је $g(1) = 0$. Доказати да постоји $\xi \in \mathbb{R}$ тако да је $g(100) = 18 g'(\xi) \sqrt{\xi}$.

Већину задатака из 2019. године смо већ прешли, па је остало још пар њих:

8. [Први колоквијум 2019.]

   а) Доказати да једначина $e^x + nx = 2019$ има јединствено решење у скупу R за сваки природан број n.

   б) За фиксиран број $n \in \mathbb{N}$, означимо са a_n решење једначине из (а), а затим формирајмо низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Доказати да је низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан.

   в) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} n(n(2018 - na_n) - 2018)$.

9. [Први колоквијум 2019.]

   а) Доказати да је функција $f(x) = x^p$, где је $0 \leqslant p \leqslant 1$, равномерно непрекидна на $(0, +\infty)$.

   б) Испитати равномерну непрекидност функције $g(x) = x^{\frac{1}{3}}(\ln(1 + |x|) + 1)$ на $\mathbb{R}$.

10. [Први колоквијум 2019.] Нека је f непрекидно-диференцијабилна функција на $[a, b]$ и нека постоји $c \in (a, b)$ тако да је $f'(c) = 0$. Доказати да постоји $\xi \in (a, b)$ тако да је

$$f(\xi) = f(a) + f'(\xi)(b - a).$$

11. [Јун 2019. (део задатка)] Дат је низ реалних бројева $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ са $a_1 = 1, a_{n+1} = \ln(1+\operatorname{arctg}(a_n)), n \geqslant 1$.

   а) Доказати да низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира и наћи му граничну вредност.

   б) Наћи реалне константе c и α такве да је $a_n \sim cn^\alpha$ кад $n \to +\infty$.