Писмени испит из Анализе 1 - 2.7.2022.

1. Нека је дата функција $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$.
   а) Испитати ток и скицирати график функције f.
   б) У зависности од $a \in \mathbb{R}$ одредити број решења једначине $f(x) = x + a$.
   в) Наћи површину троугла који тангента на график у тачки $(1, \frac{e}{2})$ образује са координатним осама.

2. Нека је $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} \frac{\cos^2 t}{t}, & t \geqslant \frac{\pi}{2} \\ 0, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Нека је $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Испитати равномерну непрекидност функције F на $[0, +\infty)$.

3. а) Доказати да је $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ за свако $x > 0$.
   б) За $a > 0$ израчунати интеграл $I(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(e^x)}{e^{ax} + e^{-ax}} dx$.

4. Нека је низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такав да је $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{\sqrt{e^{a_n^2} - 1}}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.
   а) Доказати да је $e^x > 1 + x$ за свако $x > 0$.
   б) Доказати да низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира и наћи му граничну вредност.
   в) Наћи константу $c \in \mathbb{R}$ тако да важи $a_n^2 \sim \frac{c}{n}$ када $n \to +\infty$.
   г) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin a_n$.