

1. Нека је дата функција  $f(x) = |x - 1| + \ln \left| \frac{x+1}{x} \right|$ .
  - а) Доказати да за свако  $x$  из домена функције  $f$  важи  $(\ln \left| \frac{x+1}{x} \right|)' = -\frac{1}{x(x+1)}$ .
  - б) Одредити  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$ .
  - в) Испитати диференцијабилност функције  $f$  у тачки  $x = 1$ .
  - г) Испитати ток и скицирати график функције  $f$ .
  - д) У зависности од  $a \in \mathbb{R}$  одредити број решења једначине  $f(x) = a$ .
  
2. Нека је  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна функција, диференцијабилна на  $(-1, 1)$ , таква да је  $\int_0^1 f(x)dx = -\int_{-1}^0 f(x)dx = 1$ .
  - (а) Доказати да постоје  $a \in (-1, 0)$  и  $b \in (0, 1)$  такви да је  $f(a) = -1$  и  $f(b) = 1$ .
  - (б) Доказати да постоји  $c \in (-1, 1)$  такво да  $f'(c) > 1$ .
  
3.
  - а) Одредити Маклоренов полином реда 3 функције  $g(x) = \arcsin x$ .
  - б) У зависности од параметра  $\beta \in \mathbb{R}$  испитати конвергенцију интеграла  $I_\beta = \int_0^1 \frac{x - \arcsin x}{x^\beta} dx$ .
  - в) Наћи неку примитивну функцију функције  $f(x) = \frac{x - \arcsin x}{x^2}$  на интервалу  $(0, 1)$ .
  - г) Израчунати, уколико постоји, интеграл  $I_2 = \int_0^1 \frac{x - \arcsin x}{x^2} dx$ .
  
4. Нека је низ  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  задат са  $4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = \frac{3}{4}$ . Испитати конвергенцију реда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x_n}{n}$  и сумирати га ако конвергира.