Још понешто о диференцијабилности

1 Теоријски увод

Став: Нека је $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција. Тада:
(1) Ако је $f'(x) = 0$ за све $x \in (a,b)$, тада је f константна функција;
(2) Ако је $f'(x) \geq 0$ за све $x \in (a,b)$, тада је f растућа, а уколико је $f'(x) > 0$ за све $x \in (a,b)$, тада је f строго растућа функција.
(3) Ако је $f'(x) \leq 0$ за све $x \in (a,b)$, тада је f опадајућа, а уколико је $f'(x) < 0$ за све $x \in (a,b)$, тада је f строго опадајућа функција.
(4) Ако је $|f'(x)| \leq L$ за све $x \in (a,b)$, тада је f Липшицова функција и при томе је Липшицова константа мања или једнака од L. Штавише, Липшицова константа је једнака $\sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)|$. Специјално, f је равномерно непрекидна на (a,b).
Став: Ако постоји десни лимес изводне функције $f'(x_+)$ у тачки x, онда постоји и десни извод $f'_+(x)$ у тачки x и једнаки су. Слично, ако постоји леви лимес изводне функције $f'(x_-)$ у тачки x, онда постоји и леви извод $f'_-(x)$ у тачки x и једнаки су. Коначно, ако постоји лимес функције f' у тачки x, онда је f диференцијабилна у x.
Став [Стационарне тачке и локални екстремуми]: Нека је f n пута диференцијабилна у тачки a, и нека је $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ и $f^{(n)}(a) = 0$.
(1) Ако је n непарно, тада a није локални екстремум функције f.
(2) Ако је n парно и $f^{(n)}(a) > 0$, онда f има локални минимум у a, а ако је $f^{(n)}(a) < 0$, тада f има локални максимум у a.
Дефиниција [Конвексне функције]: (1) Нека је дата функција $f : I \to \mathbb{R}$, где је $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал. Кажемо да је функција f **конвексна** ако за све $x, y \in I$ и све $\lambda \in [0,1]$ важи

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y);$$

(2) Аналогно, кажемо да је f конкавна уколико у претходној неједнакости стоји знак $\geq$. Како за $x = y$, као и за $\lambda = 0$ односно $\lambda = 1$ свакако важи знак једнакости, то кажемо да је f **строго конвексна** ако у горњој неједнакости стоји знак $<$ за све $x \neq y$ и све $\lambda \in (0,1)$. Аналогно се после тога дефинише појам **строго конкавне** функције.
(3) Нагибна функција функције f у тачки a је функција $\nu_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ задата као

$$\nu_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Став: Функција $f : I \to \mathbb{R}$ је конвексна акко је њена нагибна функција ν_a растућа за свако $a \in I$.
Став: Нека је $f : I \to \mathbb{R}$ конвексна функција.
(1) У свакој тачки $x \in \operatorname{int} I$ постоје $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$ и важи $f'_-(x) \leq f'_+(x)$;
(2) Скуп тачака из $\operatorname{int} I$ је највише пребројив;
(3) f је непрекидна на $\operatorname{int} I$.
Примедба: У претходном ставу, у делу под (3), тврђење не важи уколико узмемо I уместо $\operatorname{int} I$. Наиме, функција $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ дата са

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ x = 0 \\ x, \ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

је пример конвексне функције која је прекидна у рубној тачки $x = 0$.
Став Нека је $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна функција на (a,b), тј. $f \in \mathcal{D}^2(a,b)$. Ако је $f''(x) \geq 0$ за све $x \in (a,b)$, онда је f конвексна функција, а уколико је $f''(x) \leq 0$ за све $x \in (a,b)$, онда је f конкавна функција.

2 Задаци

1. Доказати да важе следеће неједнакости:
(а) $|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}| \leq |x-y|$, за $x, y > 0$;
(б) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|$;
(в) $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$, за $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$;
(г) $\frac{1}{a+1} \leq \log\frac{1+a}{a} \leq \frac{1}{a}$, за $a > 0$.

2. Ако је $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = A$, доказати да је $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

3. Дата је функција
$$f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}.$$
Испитати диференцијабилност функције f.

4. Ако је f диференцијабилна функција, $f(a) = 0$ и ако постоји $M \in \mathbb{R}$ такво да је $|f'(x)| \leq M|f(x)|$ за свако $x \in [a,b]$, доказати да је онда $f \equiv 0$ на $[a,b]$.

5. Нека је f парна функција која је два пута непрекидно-диференцијабилна на $\mathbb{R}$. Ако је $f''(0) \neq 0$, доказати да функција f има екстремну вредност у нули.

6. Нека је f два пута диференцијабилна функција таква да је $f(0) = f(1) = 0$ и $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = -1$. Доказати да је $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x) \geq 8$.

7. Нека је $f \in C[0,1] \cap D(0,1)$, $f(0)f(1) \neq 0$ и $f'(x) \neq 0$ кад год је $f(x) = 0$. Доказати да функција f има само коначно много нула на $[0,1]$.

8. Доказати да функција $f(x) = \arctan\log^2 x$ има две превојне тачке у интервалу $(0,1)$ и једну у $(1,2)$.

9. Одредити број реалних решења једначине $x^3 = 6\arctan x + 1$.

10. У зависности од реалног параметра a, одредити број решења једначине $\arcsin x = ax$.

11. Одредити супремум и инфимум вредности реалног параметра α за које пресек тангенте на функцију $f(x) = e^{\alpha x}$ у тачки $x = 1$ са $y-$осом припада слици функције $g(t) = 3t^2 + 6t$ на $[0,2)$. Да ли скуп оваквих α има минимум и максимум?

12. Доказати да за $x > 0$ важи $x\log\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} > -1$.

13. Доказати да за $x > 2$ важи неједнакост $(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{x} > 1$.

14. Одредити све $a > 0$ за које важи $x^a \leq a^x$ за свако $x \in (0,\infty)$.

15. Нека је $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ полином трећег степена, који има три различите нуле. Израчунати број реалних решења једначине $(p'(x))^2 - 2p(x)p''(x) = 0$.

16. (а) Ако су све нуле полиномске функције $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ реалне, доказати да су реалне и све нуле свих њених извода.
(б) Ако је $5a_3 - 2a_4^2 > 0$ и $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, да ли су сва ресења једначине $x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ реална?

17. Нека су реалне функције f и g непрекидне на $[0,1]$, диференцијабилна на $(0,1)$ и важи $f(0) = f(1) < 0$ и $3f'(x)g(x) + 11f(x)g'(x) \geq 0$ за $0 < x < 1$. Доказати да важи $g(1) \leq g(0)$.

18. (а) Нека је $f'(x) \geq (f(x))^2$ за свако $x > 0$, где $f : (0,\infty) \to (-\infty, 0)$. Наћи $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
(б) Да ли постоји диференцијабилна функција $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, таква да је $f'(x) \geq (f(x))^2$ за свако $x > 0$.

19. Нека је функција f непрекидна на $[0,2]$ и диференцијабилна на $(0,2)$. Ако је $f(0) = f(2) = M > 0$ и $|f'(x)| \leq M$ за свако $x \in (0,2)$, доказати да је функција f ненегативна на $[0,2]$.

20. Нека је $a > 0$ и $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ непрекидно-диференцијабилна функција за коју важи $\frac{1}{x-2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{x+1}$ за $x > 0$. Израчунати: (а) $\lim \frac{f(x)}{\log x}$; (б) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n(f(n+a) - f(n)))$; (в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(ax) - f(x))$.