УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Срђан Стефановић

Хармонијска анализа на локално компактним Абеловим групама и примене у операторским алгебрама

мастер рад

Београд, 2018.

Ментор:
проф. др Драгољуб Кечкић, ванредни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:
проф. др Милош Арсеновић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Ђорђе Кртинић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Садржај

0 Увод **3**

0.1 Функционална анализа . . . 3

0.2 Теорија мере . . . 4

0.3 Банахове алгебре и Гељфандова теорија . . . 5

0.3.1 Фон Нојманове алгебре . . . 8

1 Тополошке групе, Харова мера и конволуција **10**

1.1 Тополошке групе . . . 10

1.2 Харова мера . . . 16

1.3 Модуларна функција . . . 25

1.4 Конволуција . . . 27

2 Унитарне репрезентације и функције позитивног типа **34**

2.1 Унитарне репрезентације . . . 34

2.2 Репрезентације $L^1(G)$ . . . 39

2.3 Функције позитивног типа . . . 44

3 Анализа на локално компактним Абеловим групама **57**

3.1 Дуална група . . . 57

3.2 Фуријеова трансформација . . . 61

3.3 Понтрјагинова теорема о дуалности . . . 69

4 Томита-Такесакијева теорија **76**

4.1 Леве и десне Хилбертове алгебре . . . 76

4.2 Томитине алгебре . . . 99

5 Укрштени производ - дуалност и тежине **100**

5.1 Тежине на фон Нојмановој алгебри . . . 100

5.2 Модуларни услов за тежине . . . 103

5.3 Конструкција укрштеног производа . . . 104

5.4 Дуалност за укрштени производ . . . 106

5.5 Дуалне тежине . . . 113

Литература **129**

Предговор

Хармонијска анализа на локално компактним Абеловим групама је област која је почела да се развија тридесетих година прошлог века. Између осталог, идеја је била да се резултати Фуријеове анализе на $\mathbb{R}$ пренесу и на друге локално компактне Абелове групе. У приближно истом периоду, почела је да се развија теорија фон Нојманових алгебри. Четрдесет година касније су Такесаки, а потом и Ван Даеле, у својим радовима показали изразиту спону ове две области. И данас, симбиоза ове две области, која укључује и друге области попут теорије репрезентација, опште и алгебарске топологије и комплексне анализе, представља једну од главних тема којом се баве математичари у сфери операторских алгебри.

Рад се састоји од увода и пет поглавља, која су природно подељена у два дела - прва три се односе на хармонијску анализу на локално компактним Абеловим групама, док се последња два односе на њену примену у фон Нојмановим алгебрама.

У уводу је дат кратак приказ дефиниција и тврђења из функционалне анализе, теорије мере и Банахових алгебри које нису изучаване у оквиру елементарних курсева, а неопходни су за праћење остатка материјала.

У првом поглављу су уведени основни појмови за рад са битном класом тополошких група - локално компактним групама. Показана је егзистенција природно придружене, транслаторно инваријантне Харове мере на њима. На послетку је дато и излагање о конволуцији - операцији множења на Банаховој алгебри $L^1(G)$.

У другом поглављу су постављени стубови хармонијске анализе на локално компактним групама у виду теорије унитарних репрезентација, а потом и приказана њихова нераскидива веза са функцијама позитивног типа. Производ те везе је врло значајна Гељфанд-Рајковљева теорема.

У средњем поглављу смо са теорије о општим групама, прешли на комутативне групе, а потом дефинисали појам дуалне групе. Затим су показане класичне теореме Фуријеове анализе као што су Бохнерова, Планшарелова, Понтрјагинова теорема о дуалности и Фуријеова теорема инверзије, чиме је заокружена прича о првом делу рада.

У четвртом поглављу дат је детаљан приказ Томита-Такесакијеве теорије, једне од најзначајних теорија у оквиру фон Нојманових алгебри.

У последњем, петом поглављу, дат је осврт на тежине на фон Нојмановим алгебрама, а затим је дефинисана једна од најзначајних фон Нојманових алгебри - укрштени производ. Круну овог рада представља теорема о дуалности за укрштени производ, која је, може се рећи, наставак Понтрјагинове теореме о дуалности. На самом крају, показана је веза Томита-Такесакијеве теорије са тежинама и дат други поглед на укрштени производ.

На крају желео бих да се захвалим свом ментору, професору Драгољубу Кечкићу, који ме је заинтересовао за област операторских алгебри и дао идеју за израду овог рада. Такође, желео бих искрено да се захвалим и члановима комисије, професорима Ђорђу Кртинићу и Милошу Арсеновићу, који су својим дискусијама у току семинара и сугестијама приликом читања рада, значајно унапредили квалитет истог.

Поглавље 0: Увод

У уводу ћемо кратко дати дефиниције и теореме које не сматрамо елементарним, односно оне које се нису изучавале током основних студија. Оне су подељене у секције по областима и представљају неопходна предзнања за даље изучавање рада. С обзиром на обим, многе теореме ће бити дате без доказа. Њихови докази, као и део теорије који није обухваћен уводом, попут неограничених оператора и спектралне теорије, може се наћи у наведеној литератури.

0.1 Функционална анализа

Теорема 0.1. [**Банах**[1]**-Алаоглуова**[2] **теорема**] Нека је V околина нуле у тополошком векторском простору X. Тада је њена *полара*

$$V^{\circ} = \{\varphi \in X^* | |\varphi(x)| \leqslant 1 \text{ за све } x \in V\}$$

слабо* компактан скуп.

Доказ: Доказ се може наћи у (Rud91). ■

Нека је X векторски простор и $Q \subseteq X$ конвексан скуп.

Дефиниција 0.1. Тачка $a \in Q$ назива се **крајња тачка** скупа Q, ако из $b, c \in Q$, $\theta \in [0,1]$ и $a = \theta b + (1-\theta)c$, следи $a = b = c$. Тачније, крајње тачке конвексног скупа су све оне тачке које се не могу представити као конвексна комбинација неких других тачака тог скупа.

Значај крајњих тачака огледа се у следећој врло значајној теореми, коју ћемо често користити у раду.

Теорема 0.2. [**Крејн**[3]**-Милманова**[4] **теорема**] Нека је X тополошки векторски простор такав да X^* раздваја тачке. Нека је $K \subseteq X$ компактан конвексан скуп. Ако је K непразан потпростор, тада је K затворење конвексног омотача скупа својих крајњих тачака.

Доказ: Доказ се такође може наћи у (Rud91). ■

---

[1] Stefan Banach (1892-1945.), пољски математичар
[2] Leonidas Alaoglu (1914-1981.), грчки математичар
[3] Марк Григориевич Креин (1907-1989.), совјетски математичар
[4] Давид Пинхусович Милман (1912-1982.), совјетски и израелски математичар

0.2 Теорија мере

Подразумеваћемо знања са елементарних курсева из теорије мере, већина потребних предзнања могу се наћи у (ADJ12). Посебно место у овом раду ће бити намењено Радоновим мерама, тачније једном посебној класи - Харовим мерама. У уводу ћемо изложити дефиницију и особине Радонових мера, док ћемо Харовим мерама посветити значајан део прве главе.
Нека је X локално компактан Хауздорфов простор, μ Борелова мера на X, а E Борелов подскуп простора X. Претпоставићемо додатно да је X $\sigma-$компактан, тј. да постоји пребројиви покривач простора X, који се састоји од компактних скупова. Са $\mathcal{B}(X)$ означимо Борелову $\sigma-$алгебру на X.

Дефиниција 0.2. За меру μ кажемо да задовољава својство **спољашње регуларности** на E ако је

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U)|U \supseteq E, \text{U отворен}\}.$$

Дефиниција 0.3. За меру μ кажемо да задовољава својство **унутрашње регуларности** на E ако је

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K)|K \subseteq E, \text{K компактан}\}.$$

Дефиниција 0.4. Меру μ, која је коначна на свим компактним скуповима, задовољава својство спољашње регуларносте за све подскупове из $\mathcal{B}(X)$, и својство унутрашње регуларности за све отворене подскупове, називамо **Радоновом мером**[5] на X.

Напомена 0.1. Да би својства Радонове мере важила и у случају када X није $\sigma-$компактан, потребно је извршити промену саме дефиниције.

Теорема 0.3. **[Рисова[6] теорема о репрезентацији]** Нека је X локално компактан Хауздорфов простор. Означимо са $M(X)$ простор свих комплексних Радонових мера на X. Нека је за $\mu \in M(X)$ и $f \in C_0(X)$ I_μ функционал дефинисан са $I_\mu(f) = \int f d\mu$. Тада је пресликавање $\mu \to I_\mu$ изометрички изоморфизам између $M(X)$ и $C_0(X)^*$.

Доказ: Доказ се може наћи у (Fol99). ■

[5] Johann Karl August Radon (1887-1956.), аустријски математичар
[6] Frigyes Riesz (1880-1956.), мађарски математичар

Теорема 0.4. **[Рис[7]-Торинова[8] интерполациона теорема]** Нека су $(X, \mathcal{M}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ два простора са мером и $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$. За $t \in (0,1)$ дефинишимо p_t и q_t са

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad , \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Нека је T линеарно пресликавање, $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \to L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$, такво да је $\|Tf\|_{q_0} \leqslant M_0\|f\|_{p_0}$ за све $f \in L^{p_0}(\mu)$ и $\|Tf\|_{q_1} \leqslant M_1\|f\|_{p_1}$ за све $f \in L^{p_1}(\mu)$. Тада је $\|Tf\|_{q_t} \leqslant M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}$ за све $f \in L^{p_t}(\mu)$, $0 < t < 1$.

Доказ: Детаљан доказ се може наћи у (Fol99). ■

0.3 Банахове алгебре и Гељфандова теорија

Банахове алгебре су један од централних објеката у оба дела рада. У првом су нарочито место нашле код Фуријеове трансформације, а у другом делу се примењују знања првог баш у њима. Овде ће у најкраћим цртама бити изложена основна теорија о њима. Детаљније о њима, као и о нпр. спектралној теорији, неограниченим операторима и тензорском производу, се може прочитати у (Mur90), (Dix11), (KR97b), (KR97a), (Tak03), (Jon15) и на нашем језику у (Kec18).

Дефиниција 0.5. **Банахова алгебра** је алгебра A над пољем комплексних бројева са нормом таквом да је A Банахов простор у односу на њу и да за свако $x, y \in A$, важи $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$.

Дефиниција 0.6. Банахова алгебра A је **унитална** ако у A постоји неутрал.

Дефиниција 0.7. **Инволуција** на алгебри A је анти-аутоморфизам на A реда 2, тј. пресликавање $x \mapsto x^*$ задовољава следеће једнакости

$$(x+y)^* = x^* + y^*. \quad (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*, \quad (xy)^* = y^* x^*, \quad x^{**} = x,$$

за све $x, y \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.

Алгебра на којој је дефинисана инволуција назива се $^*-$**алгебра**.

---
[7]Marcel Riesz(1886-1969.), мађарски математичар
[8]G. Olof Thorin (1912-2004.), шведски математичар

Дефиниција 0.8. Банахова $^*-$алгебра А, која задовољава услов

$$\|x^*x\| = \|x\|^2, \text{ за све } x \in A, \tag{0.1}$$

назива се C^***-алгебра**.

Напомена 0.2. Приметимо да овде не захтевамо да инволуција задовољава услов $\|x^*\| = \|x\|$. То је тачно за C^*-алгебре, јер је $\|x\|^2 = \|x^*x\| \leqslant \|x^*\|\|x\|$, па закључујемо $\|x\| \leqslant \|x^*\|$, а самим тим је и $\|x^*\| \leqslant \|x^{**}\| = \|x\|$.

Наведимо сада три примера Банахових алгебри која ћемо највише изучавати у раду.

Пример 0.5. Нека је X компактан Хауздорфов простор. Тада је простор свих непрекидних комплексно-вредносних функција на X, у ознаци $C(X)$, унитална Банахова алгебра у односу на стандарне операције сабирања и множења у тачки и униформну норму. Пресликавање $f \to \overline{f}$ је инволуција, па је $C(X)$ C^*-алгебра. Слично је, за X локално компактан Хауздорфов простор, $C_0(X)$ је C^*-алгебра, али она није унитална.

Пример 0.6. Нека је H Хилбертов простор. Скуп свих ограничених линеарних оператора на H, $B(H)$, је унитална C^*-алгебра са операторском нормом и инволуцијом $T \mapsto T^*$, при чему је T^* адјунгован. Докажимо да важи својство 0.1. Прво, $\|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$. Обрнута неједнакост се добија на следећи начин. Узмимо произвољан јединични вектор $u \in H$, $\|T^*T\| \geqslant \langle T^*Tu, u\rangle = \langle Tu, Tu\rangle = \|Tu\|^2$. Сада, узимајући супремум по свим u, добијамо тражено. Приметимо такође да је свака подалгебра алгебре $B(H)$, која је затворена у операторској норми и затворена за адјунговање, C^*-алгебра.

Пример 0.7. Простор $L^1(\mathbb{R})$ је Банахова $^-$алгебра са множењем дефинисаним као $(f * g)(x) = \int\limits_R f(y)g(x-y)dy$ и инволуцијом $f^*(x) = \overline{f(-x)}$. Она није C^*-алгебра, јер не задовољава услов 0.1, али задовољава слабији услов $\|f\| = \|f^*\|$, за све $f \in L^1(\mathbb{R})$, а такве алгебре се називају инволутивним. Приметимо да $L^1(\mathbb{R})$ није ни унитална алгебра.

Нека је сада A комутативна унитална Банахова.

Дефиниција 0.9. Ненула хомоморфизам из A у $\mathbb{C}$ ћемо називати **мултипликативни функционал**. Скуп свих мултипликативних функционала на A се назива **спектар** алгебре А и означава са $\sigma(A)$.

Важи следећи став.

Став 0.8. Нека је $h \in \sigma(A)$. Тада је: (1) $h(e) = 1$, где је e неутрал у A.
(2) Ако је x инвертибилан елемент алгебре A, тада је $h(x) \neq 0$.
(3) $|h(x)| \leqslant \|x\|$, за све $x \in A$.

Доказ: (1) Узмимо $x \in A$, тако да је $h(x) \neq 0$ (овакав x постоји јер је h ненула хомоморфизам). Тада је $h(e)h(x) = h(ex) = h(x)$, па је $h(e) = 1$.
(2) Ако је x инвертибилан, тада је $h(x^{-1})h(x) = h(e) = 1$, па је $h(x) \neq 0$.
(3) Претпоставимо да постоји x такав да је $|\lambda| := |h(x)| > \|x\|$. Нека је $\varphi \in \mathbb{R}$ такав да је $h(x) = e^{i\varphi}|h(x)|$. Тада је за $y := e^{i\varphi}x$, $\lambda = h(y) > \|y\| = \|x\|$ Онда је $h(\lambda - ye) = 0$, па из (2), $\lambda - ye$ није инвертибилан, па припада $\sigma(y)$. Но, из својстава спектра елемента, важи $\lambda \leqslant \|y\|$. Контрадикција. ∎

Из Става 0.8(3), закључујемо да је $\sigma(A)$ подскуп затворене јединичне лопте B у A^*. Спектру $\sigma(A)$ затим дамо структуру тополошког простора, узимајући на њему слабу* топологију наслеђену из A^*, која је тачка по тачка топологија на A. Како су из Става 0.8(1), услови $h \not\equiv 0$ и $h(e) = 1$ еквивалентни, то је

$$\sigma(A) = \{h \in B \mid h(e) = 1 \text{ и } h(xy) = h(x)h(y) \text{ за све } x, y \in A\}.$$

Како се оба услова чувају при тачка по тачка лимесима, то је $\sigma(A)$ затворен подскуп од B у слабој* топологији. По Банах-Алаоугловој теореми, $\sigma(A)$ је компактан Хауздорфов простор.
Дефинишимо сада Гељфандову трансформацију.
За $x \in A$, дефинишимо функцију $\widehat{x}$ на $\sigma(A)$ са

$$\widehat{x}(h) = h(x).$$

Функција $\widehat{x}$ је непрекидна на спектру $\sigma(A)$, јер је топологија на $\sigma(A)$ топологија тачка по тачка конвергенције на A.

Дефиниција 0.10. Пресликавање $x \mapsto \widehat{x}$ из A у $C(\sigma(A))$ назива се **Гељфандова трансформација** на A. Ово пресликавање се често означава са Γ или Γ_A, тј.

$$\Gamma x = \Gamma_A x = \widehat{x}.$$

Наведимо следећу теорему без доказа (он се може наћи у (Fol15)).

Теорема 0.9. Нека је A комутативна унитална Банахова алгебра и $x \in A$. Тада:
(1) Гељфандова трансформација је хомоморфизам између A и $C(\sigma(A))$ и важи $\widehat{e} = 1$, где је са 1 означена функција која је константно 1;
(2) x је инвертибилан акко $\widehat{x}$ није нигде 0;
(3) Слика функцијом $\widehat{x}$ је спектар елемента x, $\sigma(x)$;
(4) $\|\widehat{x}\|_\infty \leqslant \|x\|$.

Ако је A $^*-$алгебра поставља се питање да ли важи

$$\widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}}, \quad x \in A.$$

Ово у општем случају није тачно, а уколико јесте, A се назива **симетричнаıом** алгебром.

Став 0.10. Нека је A комутативна Банахова $^*-$алгебра. Тада:
(1) A је симетрична акко је $\widehat{x}$ реално-вредносна функција за све $x = x^*$;
(2) Ако је A C^*-алгебра, тада је A симетрична;
(3) Ако је A симетрична, тада је простор $\Gamma(A)$ густ у $C(\sigma(A))$.

Доказ: Доказ се може наћи у (Fol15). ■

До сада смо изучавали само униталне алгебре. Ситуација за неуниталне алгебре је доста слична, процесом унитализације. О свему се детаљније може пронаћи у већ наведеним књигама.
За крај, наведимо главну теорему Гељфандове теорије.

Теорема 0.11. [**Прва Гељфанд-Најмаркова**[9] **теорема**] Нека је A комутативна C^*-алгебра са јединицом. Тада је Γ изометрички $^*-$изоморфизам из A у $C(\sigma(A))$, при чему знамо да је $\sigma(A)$ компактан. Уколико A нема јединицу, тада је Γ изометрички $^*-$изоморфизам из A у $C_0(\sigma(A))$ и $\sigma(A)$ је локално компактан.

Доказ: Доказ се може наћи у (Fol15) или у (Kec18). ■

0.3.1 Фон Нојманове алгебре

Дефиниција 0.11. Фон Нојманова[10] алгебра је C^*-алгебра оператора на Хилбертовом простору, која садржи јединицу и затворена је у слабој операторској топологији.

[9] Марк Аронович Наимарк (1909-1978.), совјетски математичар
[10] John von Neumann (1903-1957.), мађарско-амерички математичар, физичар и информатичар

Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ произвољан подскуп алгебре свих ограничених оператора на Хилбертовом простору H. Тада дефинишемо комутатант скупа $\mathcal{M}$ са

$$\mathcal{M}' = \{T \in B(H) \mid ST = TS \text{ за све } S \in \mathcal{M}\}.$$

Једноставно се проверава да је $\mathcal{M}'$ унитална алгебра која је слабо затворена. Ако је додатно $\mathcal{M}$ затворена за адјунговање, онда је таква и $\mathcal{M}'$. Дакле, $\mathcal{M}'$ је једна фон Нојманова алгебре. Затим можемо отићи корак даље, можемо посматрати комутант комутанта ($\mathcal{M}'' := (\mathcal{M}')'$), који ћемо назвати **бикомутант**, он је наравно фон Нојманова алгебра. При уведеним ознакама, важи следећа фундаментална теорема.

Теорема 0.12. [**Фон Нојманова теорема о бикомутанту**] Нека је $\mathcal{M}$ произвољна недегенерисана $^*-$подалгебра алгебре $B(H)$. Тада:
(а) $\mathcal{M}$ је густ у $\mathcal{M}''$ у јакој операторској топологији.
(б) Следећи услови су еквивалентни:
  (1) $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$;
  (2) $\mathcal{M}$ је фон Нојманова алгебра;
  (3) $\mathcal{M}$ је затворена у односу на јаку операторску топологију.

Поглавље 1: Тополошке групе, Харова мера и конволуција

У овом поглављу увешћемо стандардне појмове неопходне за проучавање анализе на локално компактним Абеловим групама. Најпре, радићемо на групи G која је притом тополошка и на којој је дефинисана Харова мера. Модуларна функција служи као помоћ за рад са Харовим мерама (тј. за однос леве и десне које ћемо дефинисати у наставку). На крају поглавља дато је излагање о конволуцији, производу на Банаховој $*$-алгебри $L^1(G)$, једном од централних објеката хармонијске анализе, као и на $M(G)$, простору Радонових комплексних мера.

1.1 Тополошке групе

На почетку ове секције биће дефинисане тополшке групе, које су као што им само име каже групе, на којима је дефинисана топологија која задовољава одређена својства. Доказаћемо основна својства везана за њих, а како ћемо у целом раду радити са тополошким групама, иста ћемо често користити. Започнимо излагање са дефиницијом тополошке групе.

Дефиниција 1.1. Група G је **тополошка група** уколико је она снабдевена топологијом у односу на коју су операције множења $(x, y) \mapsto xy$ из $G \times G$ у G и инвертовања $x \mapsto x^{-1}$ из G у G непрекидне.

Пример 1.1. Наводимо пар основних примера тополошких група:
(1) Све Лијеве групе, које притом имају и структуру многострукости, су тополошке групе. Дакле, то су $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $O(n)$, $U(n)$ и многе друге;
(2) Адитивне групе Банахових простора су тополошке групе. Нпр. то су $\mathbb{R}^n$, $L^p(X, \mu)$, $C_0(X)$ и $C_c(X)$;
(3) Произвољна група са дискретном топологијом.

Најпре уведимо следеће стандардне ознаке. Неутрални елемент групе G означићемо са 1. Ако су $A, B \subseteq G$ и $x \in G$, онда је

$$Ax = \{yx \mid y \in A\} \quad , \quad xA = \{xy \mid y \in A\}$$

$$A^{-1} = \{y^{-1} \mid y \in A\} \quad , \quad AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\} \quad , \quad A^2 = \{x^2 \mid x \in A\}.$$

Напомена 1.1. Приметимо да постоји очигледна разлика између AA и A^2, тј. очигледно је $A^2 \subset AA$, али инклузија може бити строга.
За подскуп A групе G кажемо да је **симетричан** ако важи $A = A^{-1}$. Такође, приметимо да је $A \cap B = \varnothing$ еквивалентно са $1 \notin A^{-1}B$.
Сада пређимо на извођење неких основних особина које важе за тополошке групе.

Став 1.2. Нека је G тополошка група, $x \in G$ и $A, B, U \subseteq G$ непразни. Тада:
(а) Пресликавања $y \mapsto xy$, $y \mapsto yx$ и $x \mapsto x^{-1}$ су хомеоморфизми. Специјално, G је инваријантна у односу на транслацију и инвертовање.
(б) Ако је U отворен, тада су и AU и UA отворени.
(в) За сваку околину U, $1 \in U$, постоји симетрична околина V, $1 \in V$, таква да је $VV \subseteq U$.
(г) Ако су A и B компактни, тада је и AB компактан.

Доказ: (а) Наведена пресликавања су непрекидна по дефиницији, а очигледно и бијекције чија су инверзна пресликавања такође непрекидна. Одатле она чувају отвореност, тј. ако је U отворен скуп, онда су такви и xU, Ux и U^{-1}.
(б) Приметимо да важи $AU = \bigcup\limits_{x \in A} xU$ и $UA = \bigcup\limits_{x \in A} Ux$, па тврђење директно следи јер смо у (а) показали отвореност скупова xU и Ux.
(в) Најпре, приметимо да су скупови AA^{-1} и $A \cap A^{-1}$ симетрични и ако $1 \in A$ непразни. Сада, из непрекидности функције $(x, y) \mapsto xy$ у $(1, 1)$, постоје отворени скупови $V_1 \ni 1$ и $V_2 \ni 1$, такви да је $V_1V_2 \subseteq U$. Тада је $V_1 \cap V_2$ отворен и садржи 1. Тражену околину V онда добијамо као $V = (V_1 \cap V_2) \cap (V_1 \cap V_2)^{-1}$.
(г) Последњи део става следи из чињенице да је $A \times B$ компактан у $G \times G$ и да је слика компактног скупа непрекидном функцијом $(x, y) \mapsto xy$ компактан скуп. ■

Сада ћемо посматрати подгрупе тополошких група и одговарајуће количничке групе. Приметимо да је свака подгрупа тополошке групе такође тополошка група.

Став 1.3. Нека је H подгрупа тополошке групе G. Тада је:
(а) $\overline{H}$ подгрупа од G.
(б) Сваки отворен подскуп H групе G је истовремено и затворен.
(в) Ако је G Хауздорфов и H локално компактан скуп у релативној топологији наслеђеној из G, тада је H затворен у G.

Доказ: (а) Ако $x, y \in \overline{H}$, тада постоје мреже $\{x_\alpha\}$ и $\{y_\beta\}$ у H које конвергирају ка x, односно y. Како је H подгрупа од G, то $x_\alpha y_\beta \in H$ и $x_\alpha^{-1} \in H$ за све индексе, па из непрекидности добијамо да $xy, x^{-1} \in \overline{H}$, па је $\overline{H}$ подгрупа од G.
(б) Како је H отворен, то су отворени и сви xH по прошлом Ставу. Тада је $G \backslash H = \bigcup_{x \in G \backslash \{1\}} xH$ отворен скуп као унија таквих одакле је H затворен.
(в) Из локалне компактности H, постоји скуп $U \ni 1$ отворен у G, при чему је $U \cap H$ садржан у неком компактном скупу $K \subseteq H$. Узмимо сада произвољну мрежу $\{x_\alpha\} \in H$ која конвергира ка неком $x \in G$ и докажимо да $x \in H$. Тада $xx_\alpha^{-1} \to 1$, па постоји индекс β тако да $xx_\beta^{-1} \in U$, тј. $x \in Ux_\beta$. Ux_β је отворен и садржи x, па постоји γ, тако да из $\gamma \leqslant \alpha$ следи $x_\alpha \in Ux_\beta$, тј. $x_\alpha \in Ux_\beta \cap H = (U \cap H)x_\beta \subseteq Kx_\beta$. Kx_β је компактан из непрекидности множења, па из Хауздорфовости G, следи да је Kx_β затворен у G, па $\lim x_\alpha = x \in Kx_\beta \subseteq H$, што смо и хтели да покажемо. ∎

Када имамо подгрупу H тополошке групе G, тада имамо и канонску пројекцију $\pi : G \to G/H$, $\pi(x) = xH$, па индукујемо на G/H количницку топологију стандардно: скуп $U \subseteq G/H$ је отворен акко је $\pi^{-1}(U)$ отворен у G. У општем случају, канонска пројекција је непрекидна, али не мора бити отворено пресликавање. Ипак, за тополошке групе и то важи.

Став 1.4. Нека је H подгрупа тополошке групе G. Тада је канонска пројекција π отворено пресликавање и важи:
(а) Ако је H затворен, тада је G/H Хауздорфов.
(б) Ако је G локално компактан простор, тада је и G/H локално компактан. Такође, ако је G и Хауздорфов, а H затворен, тада за сваки компактан $E \subseteq G/H$, постоји компактан скуп $K \subseteq G$ такав да је $\pi(K) = E$.
(в) Ако је H нормална подгрупа од G, тада је G/H тополошка група.

Доказ: Узмимо произвољан отворен скуп U у G. Тада је $\pi^{-1}(\pi(U)) = UH$ који је такође отворен скуп по Ставу 1.2(а). Тада је и $\pi(U)$ отворен по

дефиницији количничке топологије, тј. π је отворено пресликавање.
(а) Претпоставимо да су $\overline{x} = \pi(x)$, $\overline{y} = \pi(y)$ различите тачке у G/H. Како је H затворен, то је и xHy^{-1} затворен по Ставу 1.2(а) који, приметимо, не садржи 1, па по Ставу 1.2(в) постоји симетрична околина $U \ni 1$ за коју је $UU \cap xHy^{-1} = \varnothing$. Како је $U = U^{-1}$ и $H = HH$, а такође и $U \cap xHy^{-1}U^{-1} = \varnothing$ и $1 \notin UxH(Uy)^{-1} = (UxH)(UyH)^{-1}$, важи $(UxH) \cap (UyH) = \varnothing$, па су $\pi(Ux)$ и $\pi(Uy)$ дисјунктне околине од $\overline{x}$ и $\overline{y}$, па је G/H Хауздорфов.
(б) Узмимо произвољну тачку $xH \in G/H$, па како је G локално компактан, то постоји компактан скуп $K \ni 1$, а онда је $\pi(xK)$ компактан скуп (као непрекидна слика компактног) који садржи xH, а то значи да је G/H локално компактан. Сада нека је G још и Хауздорфов, а H затворен и $E \subseteq G/H$ који је компактан. Тада постоји U околина 1, таква да је $\overline{U}$ компактан, а из (а) знамо да је G/H Хауздорфов па је E затворен. Како је π отворено пресликавање, а E компактан можемо га покрити са коначно много скупова $\pi(xU), i = 1, 2, \ldots, n$, при чему $x_i \in G$. Тражени скуп K добијамо као $K = \pi^{-1}(E) \cap \bigcup_{i=1}^{n} x_i\overline{U}$, а он је затворен као пресек два затворена скупа (π је непрекидна, а E затворен), то је он затворен подскуп компактног скупа ($\bigcup_{i=1}^{n} x_i\overline{U}$ је компактан), па је самим тим и компактан.
(в) Знамо да за нормалну групу H важи да је $xH = Hx, (\forall x \in G)$ и да је G/H група с добро дефинисаним операцијама множења $(xH, yH) \mapsto xyH$ и инвертовања $xH \mapsto x^{-1}H$. Све што онда у ствари треба да покажемо да су наведене операције непрекидне. Нека је W околина xyH. Тада је $\pi^{-1}(W)$ околина од xy, па из непрекидности множења у G следи да постоје околине U и V такве да је $UV \subseteq \pi^{-1}(W)$. Како је π на и хомоморфизам група, то је $\pi(U)\pi(V) \subseteq W$, па можемо узети $\pi(U) \times \pi(V)$ за тражену околину (xH, yH) којом показујемо непрекидност множења у G/H, а слично се показује и непрекидност инвертовања, чиме је доказ завршен. ■

Наредни став нам омогућава да без неких посебних рестрикција можемо претпоставити да је тополошка група Хауздорфова.

Став 1.5. (а) Нека је G T1 простор, тада је G Хауздорфов. Ако G није T1, онда је $\overline{\{1\}}$ затворена нормална подгрупа и $G/\overline{\{1\}}$ је Хауздорфова тополошка група састављена од скупова $\overline{\{x\}}, x \in G$.
(б) Дефинишимо $\mathfrak{B}(G)$ као фамилију Борелових скупова генерисаних

отвореним скуповима у G. Тада је свака Борел мерљива функција $f : G \to \mathbb{C}$ константа на $\overline{\{x\}}$, где је x произвољан елемент из G.

Доказ: (а) Ако је G Т1 простор, онда је тачка затворен скуп, па је $\{1\}$ нормална затворена подгрупа од G, па је по претходном Ставу $G/\{1\}$ Хауздорфова тополошка група и како је $\pi : G \to G/\{1\}$ отворено, то је оно и хомеоморфизам. Како хомеоморфизам чува Хауздорфовост, то је и G Хауздорфов. Ако G није Т1 простор, онда је $\overline{\{1\}}$ затворена подгрупа по Ставу 1.3(а). Нека је $x \in G$ и $y \in \overline{\{1\}}$. Тада константан низ 1 конвергира ка y, па из непрекидности множења имамо да $x1x^{-1} \to xyx^{-1}$, тј. $1 \to xyx^{-1}$. Одатле знамо да $xyx^{-1} \in \overline{\{1\}}$ за све $x \in G$ одакле следи нормалност, а тиме и тврђење. Коначно, приметимо да је $G/\overline{\{1\}} = \{x\overline{1} | x \in G\} = \{\overline{x} | x \in G\}$, што следи из просте чињенице да је транслација хомеомерфизам, чиме смо у потпуности доказали први део става.
(б) За други део, претпоставимо супротно, тј. да постоји најпре $x \in G$ и $f : G \to \mathbb{C}$ Борел-мерљива функција која није константна на $\overline{\{x\}}$. За произвољно $z \in \mathbb{C}$ из скупа вредности функције f на $\overline{\{x\}}$, скуп $f^{-1}(z) \cap \overline{\{1\}}$ непразан мерљив скуп, строго садржан у $\overline{\{x\}}$. Покажимо да не постоји такав скуп. Применимо стандардну идеју за теорију мере - дефинишимо фамилију скупова $\mathfrak{F}$ на G као

$$\mathfrak{F} = \{A \subseteq G | A \cap \overline{\{x\}} = \varnothing \quad \text{или} \quad \overline{\{x\}} \subseteq A\}.$$

Лако се види да је $\mathfrak{F}$ σ-алгебра. Докажимо да $\mathfrak{F}$ садржи све отворене скупове, а тиме и све Борел-мерљиве, одакле директно следи да не постоји непразан мерљив скуп строго садржан у $\overline{\{x\}}\}$ што доводи до контрадикције. Нека је U непразан отворен скуп у G. Ако $x \notin U$, тада директно из дефиниције затворења следи $\overline{\{x\}} \cap U = \varnothing$, тј. $U \in \mathfrak{F}$. У другом случају када $x \in U$, најпре применимо да по претходном случају и по (а) следи $G \backslash U = \bigcup_{y \in G \backslash U} \overline{\{y\}}$. Ако би било $\overline{\{x\}} \backslash U \neq \varnothing$, тада би постојао $y \in G \backslash U$ такав да је $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} \neq \varnothing$, што није могуће из дела под (а) чиме смо завршили доказ у потпуности. ∎

Од сада ћемо сматрати да је тополошка група Хауздорфова (можемо радити са $G/\overline{\{1\}}$ уместо са G). Дакле, под локално компактном групом сматраћемо тополошку групу чија је топологија локално компактна и која је притом Хауздорфова.

Став 1.6. Свака локално компактна група G има подгрупу G_0 која је отворена, затворена и σ-компактна. Специјално, ако је G повезан скуп, онда је G σ-компактан.

Доказ: Нека је K компактна и симетрична околина, таква да $1 \in \text{int}K$ (ово можемо претпоставити јер је G локално компактна и Хауздорфов). Дефинишимо сада низ скупова $K_1 = K$, $K_n = KK\dots K$ (где се K понавља n пута). Дефинишимо тада $G_0 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$. Тада је G_0 група (то је група генерисана са K) која је отворена јер за произвољно $x \in G_0$, $x \in K_n$ за неко $n \in \mathbb{N}$, па је $x\,\text{int}K \subseteq xK \subseteq K_{n+1} \subseteq G_0$, тј. $x\,\text{int}K$ је отворена околина садржана у G_0. По Ставу 1.3(б), онда је G_0 и затворен, а по самој својој конструкцији је σ-компактан, па су испуњени сви захтеви. Специјално, ако је G повезан, онда је једини непразан скуп који је и отворен и затворен, а подскуп је G управо он сам, а како према управо реченом гарантујемо његову егзистенцију и σ-компактност, то је доказ завршен. ■

На крају ове подсекције, дефинишимо леви и десни оператор транслације функције f који ће нам играти битну улогу у многим наредним разматрањима у раду. Нека је f функција на тополошкој групи G и $y \in G$, тада су леви, односно десни, оператор транслације дефинисани као

$$L_y f(x) = f(y^{-1}x) \quad , \quad R_y f(x) = f(xy).$$

Разлог зашто користимо y^{-1} у L_y, а y у R_y је да би пресликавања $y \mapsto L_y$, односно $y \mapsto R_y$ били хомоморфизми група, односно да би важило

$$L_{yz} = L_y L_z \quad , \quad R_{yz} = R_y R_z.$$

Тада можемо дефинисати аналогон униформне непрекидности функција. Наиме, кажемо да је f **лево униформно непрекидна** (**десно униформно непрекидна**) ако важи $\lim_{y \to 1} \|L_y f - f\|_\infty = 0$ (тј. $\lim_{y \to 1} \|R_y f - f\|_\infty = 0$). Коначно, покажимо тврђење везано за наведене операторе које ћемо користити у даљем раду:

Став 1.7. Ако $f \in C_c(G)$, тада је она и лево и десно униформно непрекидна.

Доказ: Даћемо доказ десне униформне непрекидности, док се за леву доказује аналогно. Нека је K компактан носач функције f и нека је $\epsilon > 0$ произвољан. Како је f непрекидна, то за сваки $x \in K$, постоји околина U_x од 1, таква да је $|f(xy) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ за свако $y \in U_x$. Онда једноставно постоји и симетрична околина $V_x \ni 1$ тако да је $V_x V_x \subseteq U_x$. Тада скуп $\{xV_x | x \in K\}$ покрива K, па постоје $x_1, \ldots, x_n \in K$ такви да је $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} x_j V_{x_j}$. Сада дефинишимо V као $V = \bigcap_{j=1}^{n} V_{x_j}$. Циљ нам је да покажемо $\|R_y f - f\|_\infty < \varepsilon$ за све $y \in V$. Најпре, из покривача знамо да за произвољно $x \in K$ постоји j тако да је $x_j^{-1}x \in V_{x_j}$, па $xy = x_j(x_j^{-1}x)y \in x_j U_{x_j}$. Тада је

$$|f(xy) - f(x)| \leqslant |f(xy) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ако је сада $xy \in K$, аналогним поступком долазимо до истог закључка. Последњи случај је ситуација када оба x и $f(x) = f(xy) = 0$, чиме је доказ завршен. ∎

1.2 Харова мера

У другом делу овог поглавља пажњу ћемо посветити Харовој мери. Посебно, показаћемо егзистенцију, на коју је стављен посебан нагласак, а потом и један облик јединствености Харове мере на локално компактној групи G. Ову меру је увео Алфред Хар [11] у свом раду (Haa33).
Нека је G локално компактна група. Дефинишимо сада скуп $C_c^+(G)$ као:

$$C_c^+(G) = \{f \in C_c(G) | f \geqslant 0, f \not\equiv 0\}.$$

Очигледно, линеарни омотач од $C_c^+(G)$ је $C_c(G)$.

Дефиниција 1.2. **Лева Харова мера** (односно **десна Харова мера**) на G је ненула Радонова мера μ на G која задовољава једнакост: $\mu(xE) = \mu(E)$ (односно $\mu(Ex) = \mu(E)$) за сваки Борелов скуп $E \subseteq G$ и за сваки $x \in G$.

Пример 1.8. Лебегова мера на адитивној групи $\mathbb{R}^n$ је основни пример леве и десне Харове мере. Добро је познато да је ова мера транслаторно инваријантна.

Наредни став нам даје један релативно општи начин за налажење Харове мере на тополошким групама.

[11] Alfred Haar (1885-1933.), мађарски математичар

Став 1.9. Нека је G локално компактна група која је хомеоморфна отвореном подскупу U скупа $\mathbb{R}^n$, таква да ако идентификујемо G са U, леве транслације су афина пресликавања, односно, $xy = A_x(y) + b_x$, где је A_x линеарна трансформација на $\mathbb{R}^n$, а $b \in \mathbb{R}^n$. Тада је $\frac{1}{|\det A_x|}dx$ лева Харова мера на G, при чему је dx Лебегова мера на $\mathbb{R}^n$.

Доказ: Детаљи се могу наћи у (Fol15). ∎

Из овог става се као последица могу извући наредни примери.

Пример 1.10. (1) $\frac{1}{|x|}$ је Харова мера на мултипликативној групи $\mathbb{R}\backslash\{0\}$;
(2) Ако је G мултипликативна група ненула комплексних бројева облика $z = x + iy$, тада је $\frac{1}{x^2+y^2}dxdy$ Харова мера на G;
(3) Ако је $G = GL_n(\mathbb{R})$, тада је $\frac{1}{|detA|^n}dA$ и лева и десна Харова мера на G, при чему је dA Лебегова мера на $\mathbb{R}^{n\times n}$;
(4) Нека је $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ тада је $dxdydz$ и лева и десна Харова мера иако група није комутативна. Наиме, идентификујмо елемент из G са елементом $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ из $\mathbb{R}^3$. Тада је

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+u \\ xw+y+v \\ z+w \end{bmatrix} = A_{(x,y,z)} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + b_{(x,y,z)},$$

где је $A_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, па је по претходном Ставу $1 \cdot d(x, y, z) = dxdydz$ лева Харова мера на G. Слично се покаже да је она и десна.

Важи једноставан став:

Став 1.11. Нека је μ Радонова мера на локално компактној групи G и дефинишимо $\widetilde{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$. Тада је:
(а) μ лева Харова мера акко је $\widetilde{\mu}$ десна Харова мера.
(б) μ је лева Харова мера акко је $\int L_y f d\mu = \int f d\mu$ за сваки $f \in C_c^+(G)$ и за сваки $y \in G$.

Доказ: (а) Ако је μ лева Харова мера, тада је $\widetilde{\mu}(Ex) = \mu((Ex)^{-1}) = \mu(x^{-1}E^{-1}) = \mu(E^{-1}) = \widetilde{\mu}(E)$, тј. $\widetilde{\mu}$ је десна Харова мера. Слично се показује и обратан смер.
(б) Најпре претпоставимо да је μ лева Харова мера и $y \in G$. Приметимо најпре да је $L_y\chi_E = \chi_{yE}$. Тада за просте функције $s = \sum_{i=1}^{n} c_i\chi_E$, $c_i \geqslant 0$, имамо

$$\int s d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i\mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i\mu(yE_i) = \int L_y s d\mu.$$

Како је $\int f d\mu = \sup\{\int s d\mu | s$ проста и $f \geqslant s\}$, тада за све $f \in C_c^+(G)$ важи $\int f d\mu = \int L_y f d\mu$.
Обратно, нека је $\int f d\mu = \int L_y f d\mu$ за све $f \in C_c^+(G)$ и за све $y \in G$. Тада наведена једнакост мора важити и за све $f \in C_c(G)$, јер су оне линеарне комбинације функција из $C_c^+(G)$, па тврђење следи применом Рисове теореме о репрезентацији. ■

На основу дела под (б), можемо закључити да се Харова мера потпуно реконструише из интеграла функције $f \in C_c(G)$.
Централни доказ везан за Харову меру јесте егзистенција исте на локално компактним групама које ћемо изучавати.

Теорема 1.12. Нека је G локално компактна група. Тада постоји (лева) Харова мера μ на G.

Доказ: Доказа ове теореме има велики број и већина су доста компликовани. Ми ћемо овде дати један од могућих, за који је по мишљењу аутора потребно најмање предзнање. Постоје докази који су сами по себи краћи, као нпр. доказ коришћењем Марков-Какутанијеве теореме о фиксној тачки приказан у раду (Izz92), али траже увођење нових појмова.
Пређимо на доказ. За произвољне $f, \phi \in C_c^+(G)$ дефинишимо

$$C_{f,\phi} := \{\sum_{j=1}^{n} c_j | n \in \mathbb{N}, c_1, c_2, ..., c_n > 0, x_1, x_2, ..., x_n, f \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\phi\},$$

а затим и

$$(f:\phi) := \inf\ C_{f,\phi}.$$

Најпре докажимо да је $C_{f,\phi}$ непразан за све $f, \phi \in C_c^+(G)$ и да је тиме добро дефинисан $(f:\phi)$.

Лема 1.13. Нека су $f, \phi \in C_c^+(G)$. Тада постоје $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ тако да је $f \leqslant 2\frac{\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty}\sum_{j=1}^n L_{x_j}\phi$.

Доказ: Дефинишимо отворен скуп $U := \{x \in G | \phi(x) > \frac{\|\phi\|_\infty}{2}\}$. Он је такође и непразан јер је по дефиницији $\|\phi\|_\infty > 0$. Тада је $\{xU\}_{x\in G}$ је покривање supp f, па како је он компактан, то постоје $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ такви да је supp $f \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} x_j U$.

За $y \in U$ и $x \in G$ имамо да је $f(x) \leqslant 2\frac{\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty}\phi(y)$. За $x \in x_j U$ имамо да $x_j^{-1}x \in U$ па

$$f(x) \leqslant 2\frac{\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty} L_{x_j}\phi(x),$$

па је $f \leqslant 2\frac{\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty}\sum\limits_{j=1}^{n} L_{x_j}\phi$, што доказује наведени циљ. ■

Такође јасно је да важи $0 \leqslant (f:\phi) \leqslant 2n\frac{\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty}$, где је n број из прошле леме.

Сада ћемо показати битна и за даљи доказ корисна својства $(f:\phi)$.

Лема 1.14. Нека $f, g, \phi \in C_c^+(G)$ и $c > 0$. Тада за $(f:\phi)$ важе следеће особине:

(1) $(f:\phi) = (L_x f:\phi)$, за сваки $x \in G$;

(2) $(f+g:\phi) \leqslant (f:\phi) + (g:\phi)$;

(3) $(cf:\phi) = c(f:\phi)$;

(4) Ако је $f \leqslant g$, тада је $(f:\phi) \leqslant (g:\phi)$;

(5) $(f:g) \geqslant \frac{\|f\|_\infty}{\|\phi\|_\infty}$;

(6) $(f:\phi) \leqslant (f:g)(g:\phi)$.

Доказ: (1) Користећи да је $L_{xy} = L_x L_y$ имамо

$$f \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\phi \Rightarrow L_x f \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j x}\phi,$$

па важи $C_{f,\phi} \leqslant C_{L_x f,\phi}$. Обратан смер следи из импликације

$$L_x f \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\phi \Rightarrow f \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j x^{-1}}\phi.$$

(2) Приметимо да из $f \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\phi$ и $g \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} d_j L_{y_j}\phi$ следи да је $(f+g:\phi) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} c_j + \sum\limits_{j=1}^{m} d_j$, што показује друго својство.
(3) Еквиваленција

$$f \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\phi \iff cf \leqslant \sum_{j=1}^{n} cc_j L_{x_j}\phi,$$

показује треће својство.
(4) Нека је $f \leqslant g$. Нека $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \in C_{g,\phi}$. Тада је $f \leqslant g \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\phi$ за неке x_j, па важи $C_{g,\phi} \subseteq C_{f,\phi}$, што доказује четврто својство.
(5) Нека $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \in C_{f,\phi}$. Тада постоје $x_1, \ldots, x_n \in G$, такви да је $f(x) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\phi(x) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \|\phi\|_\infty$ за све $x \in G$. Сада по дефиницији $\|\cdot\|_\infty$ норме важи $\|f\|_\infty \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \|\phi\|_\infty$, одакле следи пето својство.
(6) Нека је $f \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} c_i L_{x_i} g$ и $g \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} d_j L_{x_j}\phi$. Тада је

$$f \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i d_j L_{x_i y_j}\phi,$$

па $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} c_i d_j \in C_{f,\phi}$. Како су c_i и d_j позитивни, то је

$$(f:\phi) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i d_j = (\sum_{i=1}^{n} c_i)(\sum_{j=1}^{m} d_j),$$

па како ово важи за произвољне c_i и d_j, то је испуњено и последње својство. ■

Сада фиксирајмо $f_0 \in C_c^+(G)$ и дефинишимо

$$I_\phi(f) := \frac{(f:\phi)}{(f_0:\phi)}, \quad f, \phi \in C_c^+(G).$$

Из прва четири својста леме 1.14 закључујемо да је функционал I_ϕ лево-инваријантан, субадитиван, хомоген степена 1 и монотон. Из леме 1.14(6) следи да је

$$\frac{1}{(f_0:f)} \leqslant I_\phi(f) \leqslant (f:f_0). \tag{1.1}$$

Било би лепо да је I_ϕ линеаран функционал, нажалост у својству (2) претходне леме важи неједнакост. Ипак, наредна лема ће нам показати да уколико ϕ има довољно мали компактан носач, I_ϕ се може линеарно апроксимирати.

Лема 1.15. Нека $f_1, f_2 \in C_c^+(G)$ и $\varepsilon > 0$. Тада постоји околина $V \ni 1$ у G таква да, ако је $\operatorname{supp} \phi \subseteq V$, тада $I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leqslant I_\phi(f_1 + f_2) + \varepsilon$.

Доказ: Фиксирајмо $g \in C_c^+(G)$ тако да је $g = 1$ на $\operatorname{supp}(f_1 + f_2)$ и нека је δ позитиван број. Нека је $h := f_1 + f_2 + \delta g$ и $h_i := \frac{f_i}{h} (i = 1, 2)$, са напоменом да је $h_i = 0$ где год је $f_i = 0$ (дакле невезано да ли је $h = 0$). Тада $h_i \in C_c^+(G)$, па по 1.7 постоји околина $V \in 1$ у G тако да је $|h_i(x) - h_i(y)| < \delta$, за $i = 1, 2$ и $y^{-1}x \in V$. Нека је $\operatorname{supp} \phi \subseteq V$. Ако је $h \leqslant \sum c_j L_{x_j}\phi$, тада је

$$f_i(x) = h(x)h_i(x) \leqslant \sum c_j \phi(x_j^{-1}x)h_i(x) \leqslant \sum c_j \phi(x_j^{-1}x)(h_i(x_j) + \delta),$$

јер је $|h_i(x) - h_i(x_j)| < \delta$ кад год $x_j^{-1}x \in \operatorname{supp} \phi$. Како је по дефиницији $h_1 + h_2 \leqslant 1$, то је

$$(f_1 : \phi) + (f_2 : \phi) \leqslant \sum c_j(h_1(x_j) + \delta) + \sum c_j(h_2(x_j) + \delta) \leqslant \sum c_j(1 + 2\delta).$$

Узимајући инфимум по свим сумама $\sum c_j$ и по 1.14(2) и 1.14(3) закључујемо:

$$I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \leqslant (1 + 2\delta)I_\phi(h) \leqslant (1 + 2\delta)(I_\phi(f_1 + f_2) + \delta I_\phi(g)).$$

Тражено можемо добити узимајући δ довољно мало да је

$$2\delta(f_1 + f_2 : f_0) + \delta(1 + 2\delta)(g : f_0) < \varepsilon,$$

јер по једнакости 1.1 имамо

$$\begin{aligned} I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) &\leqslant (1 + 2\delta)(I_\phi(f_1 + f_2) + \delta I_\phi(g)) \\ &\leqslant (1 + 2\delta)(I_\phi(f_1 + f_2) + \delta(g : f_0)) \\ &\leqslant I_\phi(f_1 + f_2) + 2\delta(f_1 + f_2 : f_0) + \delta(g : f_0)) < I_\phi(f_1 + f_2) + \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Сада можемо да комплетирамо доказ егзистенције Харове мере. За сваки $f \in C_c^+(G)$ са X_f означимо интервал $[(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)]$ и нека је $X := \prod_{f \in C_c^+(G)} X_f$. Из једнакости 1.1 знамо да $I_\phi \in X$ за све $\phi \in C_c^+(G)$. Из

Тихоновљеве теореме, X је компактан.
За сваку околину $V \ni 1$, дефинишимо

$$K(V) := \overline{\{I_\phi \in X | \phi \in C_c^+(G), \mathrm{supp}\ \phi \subseteq V\}}.$$

Покажимо да је пресек коначно много скупова из фамилије $K(V)$ непразан. Нека су $V_1, V_2, ..., V_n$ отворене околине 1. Тада $1 \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$, па је он отворен непразан скуп. Тада по Урисоновој леми постоји функција $\phi \in C_c^+(G)$ таква да је $\mathrm{supp}\ \phi \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$. Тада $I_\phi \in K(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i)$. Очигледно је $K(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} K(V_i)$, па је и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} K(V_i)$ непразан што смо и хтели да покажемо.
Како је сада $\{K(V)\}$ фамилија затворених скупова са претходним својством, то постоји $I \in \bigcap\limits_{V} K(V)$. Користећи дефиницију $K(V)$, као и дефиницију топологије на производу, знамо да за све $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C_c^+(G)$ и за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $\phi \in C_c^+(G)$ тако да је $\mathrm{supp}\ \phi \subseteq V$ и $|I(f_i) - I_\phi(f_i)| < \varepsilon$ за $i = 1, \ldots, n$.
Задајмо $\varepsilon > 0$ и фиксирајмо $f, g \in C_c^+(G)$. За сваки $x \in G$, по претходном постоји $\phi \in C_c^+(G)$ такав да је $|I(f) - I_\phi(f)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|I(L_x f) - I_\phi(L_x f)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Како је I_ϕ субадитиван и лево-инваријантан, то је

$$|I(f) - I(L_x f)| \leqslant |I(f) - I_\phi(f)| + |I_\phi(L_x f) - I(L_x f)| < \varepsilon.$$

Одавде је за све $x \in G$ $I(f) = I(L_x f)$.
Аналогно важи да је за $c > 0$ $I(cf) = cI(f)$.
Докажимо да је I адитиван. Из леме 1.15 постоји околина $V \ni 1$ таква да је

$$|I_\phi(f+g) - I_\phi(f) - I_\phi(g)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и $\mathrm{supp}\ \phi \subseteq V$. Штавише, $\phi \in C_c^+(G)$ можемо одабрати тако да важи $|I(f+g) - I_\phi(f+g)| < \frac{\varepsilon}{3}$ и $|I_\phi(f) + I_\phi(g) - I(f) - I(g)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Из неједнакости троугла закључујемо

$$|I(f+g) - I(f) - I(g)| < \varepsilon,$$

одакле је $I(f+g) = I(f) + I(g)$.
Проширимо сада функционал I на $C_c(G)$. Најпре ставимо $I(0) := 0$. За $f \in C_c(G)$ која је реално-вредносна, дефинишемо $I(f) = I(f^+) - I(f^-)$ (тривијално је да не зависи од избора), док за произвољан $f \in C_c(G)$,

$I(f) = I(Re(f)) + iI(Im(f))$. I је тада ненула, позитиван, линеаран функционал на $C_c(G)$, па по Рисовој теореми о репрезентацији постоји јединствена Радонова мера μ тако да је $I(f) = \int f d\mu$, за све $f \in C_c(G)$. Како је $\int f d\mu = I(f) \leqslant \frac{1}{(f_0:f)} > 0$, то је μ ненула мера. Такође, како је $\int f d\mu = I(f) = I(L_x f) = \int L_x f d\mu$ за све $x \in G$, па је по Ставу 1.11 μ Харова мера, чиме је доказ коначно завршен. ■

Сада када знамо да постоји Харова мера, њена јединственост је логично питање које се поставља. Ипак, најпре покажимо једно тврђење које ћемо користити у доказу јединствености, али које је и само по себи значајно.

Став 1.16. Ако је μ лева Харова мера на G, тада је $\mu(U) > 0$ за сваки непразан отворен скуп U и $\int\limits_G f d\mu > 0$ за сваки $f \in C_c^+(G)$.

Доказ: Нека је U отворен и непразан и претпоставимо супротно, $\mu(U) = 0$. Тада је $\mu(xU) = 0$ за сваки $x \in G$. Како се сваки компактан скуп K може прекрити са коначно много транслата од U, имамо да је $\mu(K) = 0$ за сваки компактан скуп K. Из унутрашње регуларности мере μ, следи да је $\mu(G) = 0$, те је $\mu \equiv 0$, што је контрадикција, па је $\mu(U) > 0$. Следеће, нека је $f \in C_c^+(G)$, ставимо $U = \{x | f(x) > \frac{1}{2}\|f\|_\infty\}$, који је очигледно отворен. Тада је $\int\limits_G f d\mu > \int\limits_U f d\mu > \frac{1}{2}\|f\|_\infty \mu(U) > 0$, што је и требало доказати. ■

Теорема 1.17. Нека су λ и μ леве Харове мере на G. Тада постоји $c > 0$, тако да је $\mu = c\lambda$, тј. Харова мера на G је јединствена до на мултипликативну константу.

Доказ: Из претходног става, тврђење да је $\mu = c\lambda$ је еквивалентно чињеници да је количник $\frac{\int f d\lambda}{\int f d\mu}$ исти за свако $f \in C_c^+(G)$. Узмимо неке две произвољне функције $f, g \in C_c^+(G)$. Нека је V_0 симетрична компактна околина 1 (ово наравно постоји на основу локалне компактности). Дефинишимо тада

$$A = (\text{supp } f)V_0 \cup V_0(\text{supp } f) \quad , \quad B = (\text{supp } g)V_0 \cup V_0(\text{supp } g).$$

Тада су A и B компактни као унија два таква. За свако $y \in V_0$, компактни носач функција $f(xy) - f(yx)$ и $g(xy) - g(yx)$ се налази у A односно B редом, где наведене функције посматрамо по промењљивој x. Задајмо $\epsilon > 0$. По Ставу 1.6. постоји симетрича околина $V \subseteq V_0$ тачке 1, таква да је $|f(xy) - f(yx)| < \epsilon$ и $|g(xy) - g(yx)| < \epsilon$ за свако x, када је $y \in V$. Узмимо $h \in C_c^+(G)$ тако да је $h(x) = h(x^{-1})$ и supp $h \subseteq V$. Тада је:

$$\int h d\mu \int f d\lambda = \iint h(y) f(x) d\lambda(x) d\mu(y) = \iint h(y) f(yx) d\lambda(x) d\mu(y),$$

из леве транслаторне инваријантости мере λ. Како је $h(x) = h(x^{-1})$, то имамо:

$$\begin{aligned}
\int h d\lambda \int f d\mu &= \iint h(x) f(y) d\lambda(x) d\mu(y) \\
&= \iint h(y^{-1}x) f(y) d\lambda(x) d\mu(y) \\
&= \iint h(x^{-1}y) f(y) d\mu(y) d\lambda(x) \\
&= \iint h(y) f(xy) d\mu(y) d\lambda(x) = \iint h(y) f(xy) d\lambda(x) d\mu(y).
\end{aligned}$$

Овде смо користили још и смену $x^{-1}y = y$ и Фубинијеву теорему, која свакако важи јер интегралимо по компактним скуповима, тј. скуповима коначне мере.
Из претходна два разматрања добијамо:

$$\begin{aligned}
\left| \int h d\lambda \int f d\mu - \int h d\mu \int f d\lambda \right| &= \left| \iint h(y)(f(xy) - f(yx)) d\lambda(x) d\mu(y) \right| \\
&\leqslant \epsilon \lambda(A) \int h d\mu.
\end{aligned}$$

На потпуно исти начин добијамо:

$$\left| \int h d\lambda \int g d\mu - \int h d\mu \int g d\lambda \right| \leqslant \epsilon \lambda(B) \int h d\mu.$$

Дељењем ових неједнакости редом са $\int h d\mu \int f d\mu$ односно $\int h d\mu \int g d\mu$, а затим њиховим сабирањем, закључујемо:

$$\left| \frac{\int f d\lambda}{\int f d\mu} - \frac{\int g d\lambda}{\int g d\mu} \right| \leqslant \epsilon \Big(\frac{\lambda(A)}{\int f d\mu} + \frac{\lambda(B)}{\int g d\mu} \Big).$$

Како смо ϵ бирали произвољно, а у загради је коначан израз, то десна страна тежи 0, па је разматрани количник исти за f и g које смо такође произвољно бирали, а то смо и хтели да покажемо. ■

1.3 Модуларна функција

Модуларна функција је функција која на одређени начин повезује леву и десну Харову меру. У већини случајева, ми ћемо се бавити Абеловим групама, па би цела прича са модуларном функцијом могла и да се прескочи. Ипак, због неких општих резултата, аутор се одлучио да у кратким цртама опише нека основна својства модуларне функције. Објекат који и даље наравно посматрамо је локално компактна група G са левом Харовом мером λ. За свако $x \in G$, дефинишемо $\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$ (десна страна је израз који фигурише у дефиницији десне Харове мере). Тада је λ_x опет лева Харова мера, јер је $\lambda_x(yE) = \lambda((yE)x) = \lambda(y(Ex)) = \lambda(Ex) = \lambda_x(E)$. По теореми о јединствености (леве) Харове мере, имамо да постоји број $\Delta(x) > 0$ такав да је $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$ и да $\Delta(x)$ не зависи од почетног избора λ.

Дефиниција 1.3. Функцију $\Delta(x) : G \to (0, \infty)$ дефинисану на управо описан начин, називамо **модуларна функција** на G.

Сада ћемо извести неколико врло једноставних својстава модуларне функције.

Став 1.18. Δ је непрекидни хомоморфизам из G у мултипликативну групу позитивних реалних бројева $\mathbb{R}_\times$. Штавише, за сваки $f \in L^1(G)$ важи:

$$\int R_y f d\lambda = \Delta(y^{-1}) \int f d\lambda.$$

Доказ: Да је Δ хомоморфизам из G у $\mathbb{R}_\times$ следи из чињенице да је за све $x, y \in G$ и $E \subseteq G$

$$\Delta(xy)\lambda(E) = \lambda(Exy) = \Delta(y)\lambda(Ex) = \Delta(y)\Delta(x)\lambda(E).$$

Што се тиче непрекидности и другог дела тврђења, они следе из следећег разматрања. Најпре, како је $\chi_E(xy) = \chi_{Ey^{-1}}(x)$, имамо да је:

$$\int \chi_E(xy) d\lambda(x) = \lambda(Ey^{-1}) = \Delta(y^{-1})\lambda(E) = \Delta(y^{-1}) \int \chi_E(x) d\lambda(x).$$

Ово показује да је једнакост коју желимо да покажемо тачна у случају да је $f = \chi_E$. У општем случају, једнакост следи из апроксимације функције f простим функцијама. Како је $y \mapsto R_y f$ непрекидно пресликавање из G у $C_c(G)$ по Ставу 1.7, то је $y \mapsto \int R_y f d\lambda$ непрекидно из G у $\mathbb{C}$, па непрекидност модуларне функције Δ следи из доказане једнакости. ■

Сада ћемо приказати само један мало другачији, у неким случајевима погоднији облик доказане једнакости.
Ако у једнакости $\int R_y f d\lambda = \Delta(y^{-1}) \int f d\lambda$ ставимо $y_0 = y^{-1}$ и смену $x = xy_0$, добијамо:

$$\Delta(y_0) \int f(x) d\lambda(x) = \int f(xy_0^{-1}) d\lambda(x) = \int f(x) d\lambda(xy_0),$$

што нас доводи до облика

$$d\lambda(xy_0) = \Delta(y_0) d\lambda(x)$$

Дефиниција 1.4. Група G се назива **унимодуларна** уколико је $\Delta \equiv 1$, тј. уколико је лева Харова мера уједно и десна.

Абелове групе са којима ми најчешће и радимо, као и дискретне групе су унимодуларне. Наиме, за Абелове групе је ово очигледно, а како је код дискретне групе G, произвољна тачка $x \in G$ отворен скуп, то је њена мера већа од 0. Без губљења општости, нека је $\mu(\{x\}) = 1$, при чему је μ Харова мера на G која је јединствена до на множење константом. Из транслаторне инваријантности је онда и $\mu(\{y\}) = 1$, за свако $y \in G$. Како је G група, то су лево и десно множење слободна дејства, одакле следи унимодуларност дискрентих група. Ипак постоје још неке класе модуларних група, о чему сведоче следећа тврђења:

Став 1.19. Ако је K било која компактна подгрупа од G, тада је $\Delta|_K \equiv 1$.

Доказ: Како је K компактна подгрупа, а Δ непрекидна, то је $\Delta(K)$ компактна подгрупа од $\mathbb{R}_\times$, а једина таква је $\{1\}$, одакле следи тражено тврђење. ■

Директна последица је следећа:

Последица 1.20. Ако је G компактна, тада је G унимодуларна.

Даћемо сада још једну класу унимодуларних група. Сетимо се појма из елементарне алгебре, такозваног комутатора у ознаци $[G, G]$, који представља најмању затворену подгрупу од G генерисану елементима облика $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. $[G, G]$ је и нормална подгрупа, јер за свако $z \in G$ важи $z[x, y]z^{-1} = [zxz^{-1}, zyz^{-1}]$.

Став 1.21. Ако је $G/[G,G]$ компактна група, тада је G унимодуларна.

Доказ: Како је $\Delta([x,y]) = [\Delta(x), \Delta(y)]$, а при том $\mathbb{R}_\times$ коме припада овај елемент Абелова група, то је $\Delta([x,y]) = 1$ за све $x, y \in G$. Како је по услову задатка $G/[G,G]$ компактна то је $1 = \Delta(G/[G,G]) = \Delta(G)$, према претходном запажању, па је G унимодуларна. ■

1.4 Конволуција

У последњем делу овог поглавља, усредсредићемо се на вероватно главни појам у хармонијској анализи - конволуцију. Као што знамо из елементарних курсева, конволуција је множење на Банаховој $*-$алгебри $L^1(G)$. Овде ћемо направити одговарајућу паралелу у односу на простор комплексних Радонових мера.
Нека је $M(G)$ простор свих комплексних Радонових мера на Бореловој $\sigma-$алгебри $\mathcal{B}(G)$. За те мере најпре знамо да су коначне. Узмимо произвољне $\mu, \eta \in M(G)$. Дефинишимо линеарни функционал $I : C_0(G) \to \mathbb{C}$ на следећи начин:

$$I(\phi) = \iint \phi(xy) d\mu(x) d\eta(y).$$

Очигледно важи $|I(\phi)| \leqslant \|\phi\|_\infty \|\mu\| \ \|\eta\|$, па $I \in C_0(G)^*$, а онда по Рисовој теореми о репрезентацији постоји јединствена комплексна Радонова мера $\mu * \eta$ таква да је $I(\phi) = \int \phi d(\mu * \eta)$.

Дефиниција 1.5. Јединствену комплексну Радонову меру $\mu * \eta$ која задовољава $\iint \phi(xy) d\mu(x) d\eta(y) = \int \phi d(\mu * \eta)$, зовемо **конволуцијом** мера μ и η.

Наведимо својства конволуције. Најпре приметимо да је она *асоцијативна.* Ако су $\mu, \eta, \sigma \in M(G)$ и $\phi \in C_c(G)$, тада је

$$\begin{aligned}\int \phi d(\mu * (\eta * \sigma)) &= \iint \phi(xy) d\mu(x) d(\eta * \sigma)(y) \\ &= \iiint \phi(xyz) d\mu(x) d\eta(y) d\sigma(z) \\ &= \iint \phi(yz) d(\mu * \eta)(y) d\sigma(z) = \int \phi d((\mu * \eta) * \sigma),\end{aligned}$$

где све једнакости важе по дефиницији. Одавде је $\mu * (\eta * \sigma) = (\mu * \eta) * \sigma$.
Логично ћемо се запитати да ли важи *комутативност.* Имамо да важи

$\mu * \eta = \eta * \mu$ акко је G Абелова група (ми ћемо имати срећу да радимо баш са таквим). Ако је G Абелова онда тврђење лако важи по дефиницији и из $\phi(xy) = \phi(yx)$. У супротном смеру, посматрајмо меру сконцентрисану у једној тачки x, $\delta_x \in M(G)$. Имамо да је

$$\int \phi d(\delta_x * \delta_y) = \iint \phi(tz) d\delta_x(t) \delta_y(z) = \phi(xy) = \int \phi d\delta_{xy},$$

па је $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$. Одатле је аналогно $\delta_y * \delta_x = \delta_{yx}$, па је $\delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x$ акко је $xy = yx$, тј. како смо исте бирали произвољно, када је G Абелова.
$M(G)$ има неутрал $\delta = \delta_1$, тј. меру сконцентрисану у 1, јер:

$$\int \phi d(\delta * \mu) = \iint \phi(xy) d\delta(x) d\mu(y) = \int \phi(y) d\mu(y) = \int \phi d\mu,$$

одакле је $\delta * \mu = \mu$, а слично се показује и $\mu * \delta = \mu$.
Даље, из саме дефиниције конволуције, закључујемо да је $\|\mu * \eta\| \leqslant \|\mu\| \, \|\eta\|$, па је $M(G)$ Банахова алгебра.
На њој можемо дефинисати и инволуцију на стандардан начин $\mu \mapsto \mu^*$ дефинисано са $\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})}$, тј. $\int \phi d\mu^* = \int \phi(x^{-1}) d\overline{\mu}(x)$. Да је ово заиста инволуција, показује следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned}\int \phi d(\mu * \eta)^* = \int \phi(x^{-1}) d\overline{(\mu * \eta)} &= \iint \phi((xy)^{-1}) d\overline{\mu}(x) d\overline{\eta}(y) \\ &= \iint \phi(y^{-1}x^{-1}) d\overline{\mu}(x) d\overline{\eta}(y) \\ &= \iint \phi(yx) d\mu^*(x) d\eta^*(y) = \int \phi d(\eta^* * \mu^*),\end{aligned}$$

па је $(\mu * \eta)^* = \eta^* * \mu^*$. Из свега до сада приказаног, закључујемо да важи следеће тврђење:

Став 1.22. Множење на $M(G)$ дато преко конволуције на описани начин, даје на $M(G)$ структуру Банахове*-алгебре са јединицом. У случају да је G Абелова група, тада је $M(G)$ комутативна Банахова*-алгебра са јединицом.

Подсетимо се сада конволуције на $L^1(G)$ коју смо дефинисали још у оквиру основних студија на следећи начин:

$$(f * g)(x) = \int f(y) g(y^{-1}x) dy.$$

Овде лако из Фубинијеве теореме добијамо да $f * g \in L^1(G)$ и да важи неједнакост $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$, јер:

$$\iint |f(y)g(y^{-1}x)|dxdy = \iint |f(y)g(x)|dxdy = \|f\|_1\|g\|_1,$$

где смо у првој једнакости користили леву инваријантност мере dx. Приметимо сада да се ова дефиниција конволуције поклапа са дефиницијом на почетку овог одељка ако ставимо идентификацију функције $f \in L^1(G)$ са мером $f(x)dx$. Ово и формално следи из следећег низа једнакости:

$$\iint \phi(yx)f(y)g(x)dxdy = \iint \phi(x)f(y)g(y^{-1}x)dxdy = \int \phi(x)(f * g)(x)dx.$$

Први израз је одговарајућа реформулација прве дефиниције конволуције, а прва једнакост се добија коришћењем смене $x = y^{-1}x$ и својства инваријантности мере.
Инволуција на $L^1(G)$ је пресликавање $f \mapsto f^*$ такво да је за све $x \in G$, $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$, тј. на $M(G)$, рестриковано на $L^1(G)$, $f^*(x)dx = \overline{f(x^{-1})}d(x^{-1})$. Сада коначно можемо схватити $L^1(G)$ као $*-$подалгебру од $M(G)$.
$f * g(x)$ можемо изразити на неколико различитих начина:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int f(y)g(y^{-1}x)dy \\ &= \int f(xy)g(y^{-1})dy \\ &= \int f(y^{-1})g(yx)\Delta(y^{-1})dy \\ &= \int f(xy^{-1})g(y)\Delta(y^{-1})dy, \end{aligned} \tag{1.2}$$

при чему наведене једнакости следе сменама $x = yx$, односно $x = x^{-1}$. Напоменимо да када је G унимодуларна, члан $\Delta(y^{-1})$ се губи.
Приметимо да одатле важи и следећи низ једнакости:

$$f * g = \int f(y)L_y g dy = \int g(y^{-1})R_y f dy.$$

Такође, лако се показује да се конволуција у односу на леве, тј. десне транслације понаша на следећи начин:

$$L_x(f * g) = (L_x f) * g, \quad R_x(f * g) = f * (R_x g).$$

Сада желимо да конволуцију са $L^1(G)$ проширимо на $L^p(G)$ просторе. Докажимо најпре следеће тврђење.

Став 1.23. Нека је $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L^1(G)$ и $g \in L^p(G)$. Тада важи:
(а) $f * g$ је добро дефинисано и $f * g \in L^p(G)$ и важи неједнакост

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p;$$

(б) Ако је G унимодуларна, исти закључак важи и када $f * g$ заменимо са $g * f$;
(в) Ако G није унимодуларна, и даље важи да $g * f \in L^p(G)$ када $f \in C_c(G)$.

Доказ: (а) Случај $p = \infty$ је тривијалан, док за $1 \leqslant p < \infty$ из неједнакости Минковског и транслаторне инваријантности важи

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_p &= \left(\int \left| \int f(y) g(y^{-1}x) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \int \left(\int |f(y) g(y^{-1}x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&= \int |f(y)| \int (|g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} dy = \|f\|_1 \|g\|_p.
\end{aligned}$$

(б) Ако је G унимодуларна, поново применимо неједнакост Минковског на четврти интеграл у једнакости 1.2, уз замену f и g

$$\|g * f\|_p = \left\| \int R_{y^{-1}} g(x) f(y) dy \right\|_p \leqslant \int \|R_{y^{-1}} g\|_p |f(y)| dy = \|g\|_p \|f\|_1,$$

чиме је доказано (б).
(в) Нека је $K = \operatorname{supp} f$ компактан, па поновимо сличан рачун

$$\begin{aligned}
\|g * f\|_p &= \left\| \int R_{y^{-1}} g(x) f(y) \Delta(y^{-1}) dy \right\|_p \\
&\leqslant \int \|R_{y^{-1}} g\|_p |f(y)| \Delta(y^{-1}) dy \\
&\leqslant \|g\|_p \int_K |f(y)| \Delta(y^{-1})^{\frac{1}{p}-1} dy \\
&\leqslant C \|g\|_p \|f\|_1,
\end{aligned}$$

где смо са C означили $C := \sup\limits_K \Delta(y)^{\frac{1}{p}-1}$. ∎

Став 1.24. Нека је G унимодуларна. Ако су $1 < p, q < \infty$ такви да је

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $f \in L^p(G)$, а $q \in L^q(G)$, тада $f * g \in C_0(G)$ и $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

Доказ: Нека је $x \in G$ произвољан. Тада из Хелдерове неједнакости и транслаторне инваријантности важи:

$$\begin{aligned}
|f * g(x)| &\leqslant \int |f(y)g(y^{-1}x)dy| \\
&\leqslant \left(\int |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(y^{-1}x)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int |f|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q,
\end{aligned}$$

па је $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$. Докажимо још да је $f * g \in C_0(G)$. Приметимо да за $f, g \in C_c(G)$ важи да и $f * g \in C_c(G)$. Сада за произвољне $f \in L^p(G)$ и $g \in L^q(G)$, како је $C_c(G)$ густ у њима, изаберимо низове $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ у $C_c(G)$ тако да $f_n \to f$ у L^p норми, тј. $g_n \to g$ у L^q норми. Тада за произвољан $x \in G$ по претходном имамо:

$$\begin{aligned}
|(f_n * g_n)(x) - (f * g)(x)| &= |(f_n * (g_n - g))(x) + ((f_n - f) * g)(x)| \\
&= \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q,
\end{aligned}$$

па $f_n * g_n \to f * g$ униформно, па како је $C_c(G)$ густ у $C_0(G)$ тиме је тражено доказано. ■

Овај став не важи у случају када је $p = 1$ или ∞, јер $f * g$ не мора да се анулира у бесконачности. Ипак, $f * g$ је и даље непрекидна, а важи чак и више. У том циљу, а и у циљу доказивања става који долази после тога, приметимо да важи:

Став 1.25. Ако је $1 \leqslant p < \infty$ и $f \in L^p(G)$ тада је $\lim\limits_{y \to 1} \|L_y f - f\|_p = 0$ и $\lim\limits_{y \to 1} \|R_y f - f\|_p = 0$.

Доказ: Докажимо најпре тврђење за $g \in C_c(G)$. Нека је V компактна околина 1. Дефинишимо $K := (\mathrm{supp}\ g)V \cup V(\mathrm{supp}\ g)$. Тада је K компактан и носачи $L_y g$ и $R_y g$ су садржани у K када $y \in V$. Тада је $\|L_y g - g\|_p \leqslant |K|^{\frac{1}{p}} \|L_y g - g\|_\infty$, где је са $|K|$ означена мера скупа K (користићемо равноправно и ознаку $\lambda(K)$ када наглашавамо меру λ) па пуштањем лимеса $y \to 1$, по Ставу 1.7, добијамо тражено. Друга једнакост важи аналогно.
Нека је сада $f \in L^p(G)$. Тада је $\|L_y f\|_p = \|f\|_p$ и $\|R_y f\|_p = \Delta(y)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \leqslant C\|f\|_p$ за $y \in V$. Задајмо $\varepsilon > 0$. Тада можемо

изабрати $g \in C_c(G)$ тако да је $\|f-g\|_p < \varepsilon$ па је тада (овог пута ради равноправности докажемо за R_y, а аналогно важи за L_y)

$$\|R_y f - f\|_p \leqslant \|R_y(f-g)\|_p + \|R_y g - g\|_p + \|g-f\|_p < (C+1)\varepsilon + \|R_y g - g\|_p,$$

где смо користили неједнакост троугла, при чему из претходног знамо да израз са десне стране неједнакости лежи ка 0 када $y \to 1$, чиме је доказ завршен. ■

Став 1.26. Ако је $f \in L^1(G)$ и $g \in L^\infty(G)$, тада је $f * g$ лево, а $g * f$ десно униформно непрекидна.

Доказ: По већ описаном својству, важи да је $L_x(f*g) - f*g = (L_x f - f)*g$ и $R_x(g*f) - g*f = g*(R_x f - f)$, па је

$$\|L_x(f*g) - f*g\|_\infty \leqslant \|L_x f - f\|_1 \|g\|_\infty$$

и

$$\|R_x(g*f) - g*f\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty \|R_x f - f\|_1,$$

па по Ставу 1.25 изрази с десне стране теже 0 када $y \to 1$, одакле следи тражено. ■

У случају да је G дискретна, тада за функцију δ која је дефинисана тако да је $\delta(1) = 1$, а иначе је 0, важи $f * \delta = \delta * f$ за све f. Када G није дискретна, оваква функција не постоји, па ћемо као замену за неутрал користити такозвану апроксимативну јединицу.

Дефиниција 1.6. Нека је $\mathcal{U}$ произвољна базна околина $1 \in G$ и нека је за сваки $U \in \mathcal{U}$ дефинисана функција ψ_U тако да:
(1) supp ψ_U је компактан и supp $\psi \subseteq U$;
(2) $\psi_U \geqslant 0$ и $\int \psi_U = 1$;
(3) $\psi_U(x) = \psi_U(x^{-1})$.
Тада мрежа $(\psi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ зовемо **апроксимативном јединицом**, при чему је усмерење дато са $\psi_U \leqslant \psi_V \iff V \subseteq U$.

Стандарна конструкција апроксимативне јединице је следећа: за $U \in \mathcal{U}$ узмимо симетричну околину $V \ni 1$, тако да је $\overline{V} \subseteq U$ и дефинишимо $\psi_U := \frac{1}{|V|}\chi_V$, где је са $|V|$ означена мера скупа V. Коришћењем Урисонове леме, можемо постићи и да је ψ_U непрекидна.
Пређимо сада на став којим ћемо завршити ово поглавље (а он је само један од многих у којем ћемо користити апроксимативну јединицу).

Став 1.27. Нека је $(\psi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ апроксимативна јединица. Тада је $\|f*\psi_U - f\|_p \to 0$, када $U \to \{1\}$, за $1 \leqslant p < \infty$ и $f \in L^p(G)$, односно за $p=\infty$ када је f десно униформно непрекидна. Штавише, $\|\psi_U * f - f\|_p \to 0$, када $U \to \{1\}$, за $1 \leqslant p < \infty$ и $f \in L^p(G)$, односно за $p = \infty$ када је f лево униформно непрекидна.

Доказ: Како је $\int \psi_U = 1$ и $\psi_U(x) = \psi_U(x^{-1})$, то можемо записати

$$\begin{aligned} f*\psi_U(y) - f(y) &= \int f(yx)\psi_U(x^{-1})dx - f(y)\int \psi_U(x)dx \\ &= \int (R_x f(y) - f(y))\psi_U(x)dx, \end{aligned}$$

па је по неједнакости Минковског

$$\|f*\psi_U - f\|_p \leqslant \int \|R_x f - f\|_p \psi_U(x)dx \leqslant \sup_{x\in U} \|R_x f - f\|_p,$$

па је $\|f*\psi_U - f\|_p \to 0$ по Ставу 1.25, односно у случају $p=\infty$ из десне униформне непрекидности.
Други део тврђења се доказује аналогно, уз примедбу да је

$$\psi_U(y) * f - f(y) = \int (L_x f(y) - f(y))\psi_U(x)dx.$$

■

Поглавље 2: Унитарне репрезентације и функције позитивног типа

У овом поглављу бавићемо се најпре алгебарским, али можда и кључним делом за наставак истраживања - унитарним репрезентацијама, а потом описати њихову тесну везу са функцијама позитивног типа. Као резултат те везе, поглавље ћемо завршити врло битном Гељфанд-Рајковљевом теоремом. Такође, у поглављу ће између наведена два дела, бити речи и о репрезентацијама на $L^1(G)$.

2.1 Унитарне репрезентације

Излагање ћемо започети основним појмовима теорије (унитарних) репрезентација, а затим ћемо доказати неке основне теореме које важе за њих, а које ће нам бити од изузетне важности касније.

Дефиниција 2.1. Нека је G локално компактна група. **Унитарна репрезентација** на G је хомоморфизам $\pi : G \to U(H_\pi)$ који је непрекидан у односу на јаку операторску топологију, где је $U(H_\pi)$ група унитарних оператора на неком ненула Хилбертовом простору H_π.

Дакле, имамо да за π важи $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ и $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^{-1} = \pi(x)^*$ и $x \mapsto \pi(x)u$ је непрекидно из G у H_π за сваки $u \in H_\pi$. При том, H_π називамо **простор репрезентације** π, а његову димензију **димензија** или **степен** репрезентације π.
Овде смо захтевали непрекидност у односу на јаку операторску топологију, али ништа другачије не би било ни када би захтевали слабу непрекидност, тј. тражили да је пресликавање $x \mapsto \langle \pi(x)u, v\rangle$ непрекидно из G у $\mathbb{C}$ за све $u, v \in H_\pi$ јер важи следеће:

Став 2.1. Јака и слаба операторска топологија се поклапају на $U(H_\pi)$.

Доказ: Јака свакако повлачи слабу конвергенцију. Докажимо обратно. Нека је $\{T_\alpha\}$ мрежа унитарних оператора која конвергира слабо ка T.

Тада је за сваки $u \in H_\pi$,

$$\|(T_\alpha - T)u\|^2 = \|T_\alpha u\|^2 - 2\mathrm{Re}(\langle T_\alpha u, Tu\rangle) + \|Tu\|^2 = 2\|u\|^2 - 2\mathrm{Re}(\langle T_\alpha u, Tu\rangle).$$

Друга једнакост важи јер су T_α и T унитарни. Израз $2\mathrm{Re}(\langle T_\alpha u, Tu\rangle)$ конвергира ка $2\|Tu\|^2 = 2\|u\|^2$, па $\|(T_\alpha - T)u\| \to 0$, тј. T_α јако конвергира ка T. ■

Пример 2.2. Најосновнији пример репрезентације је **лева регуларна репрезентација** $\pi_L : G \to L^2(G)$ дефинисана са

$$[\pi_L(x)f](y) = L_x f(y) = f(x^{-1}y).$$

Дефиниција 2.2. Ако су π_1 и π_2 унитарне репрезентације G, тада њихов **интерагујући оператор** јесте ограничено линеарно пресликавање $T : H_{\pi_1} \to H_{\pi_2}$ такво да је $T\pi_1(x) = \pi_2(x)T$ за свако $x \in G$. Скуп свих таквих оператора означавамо са $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$.

Сада уочимо један специјалан случај претходног. Означимо са $\mathcal{C}(\pi) = \mathcal{C}(\pi, \pi)$, тј. простор ограничених оператора на H_π који комутирају са $\pi(x)$ за свако $x \in G$. Он се, логично, назива **комутант** или **централизатор** репрезентације π. Очигледно је $\mathcal{C}(\pi)$ алгебра затворена за слабе лимесе, а такође је затворена и у односу на инволуцију $T \mapsto T^*$, тј. за $T \in \mathcal{C}(\pi)$ и за $\forall x \in G$ важи $T^*\pi(x) = [\pi(x^{-1})T]^* = [T\pi(x^{-1})]^* = \pi(x)T^*$. Одатле је $\mathcal{C}(\pi)$ једна фон Нојманова алгебра.
Даћемо још неколико уводних дефиниција везаних за унитарне репрезентације.

Дефиниција 2.3. π_1 и π_2 су **унитарно еквивалентни** ако $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ садржи оператор U, такав да је $\pi_2(x) = U\pi_1(x)U^{-1}$ за свако $x \in G$.

Дефиниција 2.4. Нека је $\mathcal{M}$ затворен потпростор од H_π. $\mathcal{M}$ се назива **инваријантан потпростор** за π ако је $\pi(x)\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ за свако $x \in G$.

Ако је $\mathcal{M}$ инваријантан и ненула, тада рестрикцију π на $\mathcal{M}$ означавамо са $\pi^{\mathcal{M}}$ и називамо је **субрепрезентација** од π.

Дефиниција 2.5. Репрезентација π се назива **неразложива** или **иредуцибилна** ако нема инваријантних потпростора осим тривијалних ($\{0\}$ и H_π), а иначе се назива **редуцибилна** или **сводљива**.

Дефиниција 2.6. Ако је $\{\pi_i\}_{i\in I}$ фамилија унитарних репрезентација, тада њихова **директна сума** $\bigoplus \pi_i$ јесте репрезентација π на $H = \bigoplus H_{\pi_i}$ дефинисана са $\pi(x)(\sum v_i) = \sum \pi(x)v_i$.

Приметимо да је у овом случају H_{π_i} инваријантни потпростори у односу на π и да је свака π_i субрепрезентација од π.
Докажимо сада једноставно тврђење:

Став 2.3. Ако је $\mathcal{M}$ инваријантан у односу на π, тада је такав и $\mathcal{M}^\perp$.

Доказ: Узмимо произвољне $v \in \mathcal{M}^\perp$ и $u \in \mathcal{M}$. Тада је $\langle \pi(x)v, u\rangle = \langle v, \pi(x^{-1})u\rangle = 0$, јер $v \in \mathcal{M}^\perp$, а $\pi(x^{-1})u \in \mathcal{M}$ пошто је $\mathcal{M}$ инваријантан. Како ово важи за сваки $u \in \mathcal{M}$, то $\pi(x)v \in \mathcal{M}^\perp$, што смо и хтели да покажемо. ■

Тривијална последица овог става је следећа:

Последица 2.4. Ако π има нетривијалан инваријантан потпростор $\mathcal{M}$, тада је π директна сума $\pi^{\mathcal{M}}$ и $\pi^{\mathcal{M}^\perp}$.
У наредним разматрањима биће нам често значајни следећи појмови.

Дефиниција 2.7. Ако је π унитарна репрезентација, тада се затворени линеарни омотач $\mathcal{M}_u$ скупа $\{\pi(x)u | x \in G\}$ у H_π назива **циклични потпростор** генерисан са $u \in H_\pi$.

Очигледно је $\mathcal{M}_u$ инваријантан у односу на π.

Дефиниција 2.8. Уколико је $\mathcal{M}_u = H_\pi$, онда се u назива **циклични вектор** за π. Репрезентација π је **циклична**, уколико постоји циклични вектор за π.

Значај цикличних репрезентација се огледа већ у следећем ставу:

Став 2.5. Свака унитарна репрезентација π је директна сума цикличних.

Доказ: Идеја је стандардна. Посматрајмо максималну фамилију $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ међусобно ортогоналних цикличних потпростора од H_π (оваква фамилија постоји из Цорнове леме). Ако постоји ненула $u \in H_\pi$ ортогоналан на све $\mathcal{M}_\alpha$, тада је из става 2.3. циклични потпростор генерисан са u такође ортогоналан на све $\mathcal{M}_\alpha$, што је у супротности са максималности $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Одатле је $H_\pi = \bigoplus \mathcal{M}_\alpha$ и важи $\pi = \bigoplus \pi^{\mathcal{M}_\alpha}$, што смо и хтели да покажемо. ■

Сада се осврћемо на један од битнијих делова овог поглавља, где пре свега мислимо на Шурову лему. У њој описујемо везу оператора из $\mathcal{C}(\pi)$ са својством неразложивости репрезентације π.

Став 2.6. Нека је $\mathcal{M}$ затворен потпростор од H_π и нека је P пројектор на $\mathcal{M}$. Тада је $\mathcal{M}$ инваријантан у односу на π акко је $P \in \mathcal{C}(\pi)$.

Доказ: Ако је $P \in \mathcal{C}(\pi)$ и $v \in \mathcal{M}$, тада је $\pi(x)v = \pi(x)Pv = P\pi(x)v \in \mathcal{M}$, где последња једнакост следи управо из услова, а ово показује да је $\mathcal{M}$ инваријантан јер смо узели произвољан v из $\mathcal{M}$. У супротном смеру, ако је $\mathcal{M}$ инваријантан и $v \in \mathcal{M}$ тада је $\pi(x)Pv = \pi(x)v = P\pi(x)v$, док ако је $v \in \mathcal{M}^\perp$ онда је $\pi(x)Pv = 0 = P\pi(x)v$ где последња једнакост следи из чињенице да је по Ставу 2.3 и $\mathcal{M}^\perp$ инваријантан у односу на π. Одавде је $\pi(x)P = P\pi(x)$, а то значи да је $P \in \mathcal{C}(\pi)$, што смо и хтели да покажемо. ■

Теорема 2.7. [Шурова лема]
(а) Унитарна репрезентација π је неразложива акко $\mathcal{C}(\pi)$ садржи само скаларне умношке идентитета.
(б) Нека су π_1 и π_2 неразложиве унитарне репрезентације на G. Ако су π_1 и π_2 унитарно еквивалентне, тада је $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ једнодимензионалан. У супротном је $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2) = \{0\}$.

Доказ: (а) Најпре претпоставимо да је π разложива. Тада π садржи нетривијалан инваријантан потпростор $\mathcal{M}$. Тада према претходном Ставу у $\mathcal{C}(\pi)$ постоји нетривијална пројекција $P \in \mathcal{C}(\pi)$, а она није скаларни умножак идентитете, чиме смо доказали први смер. Сада претпоставимо да постоји $T \in \mathcal{C}(\pi)$ такав да је $T \neq cI$. Тада су и $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$ и $B = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ из $\mathcal{C}(\pi)$ из простих својстава фон Нојманове алгебре. Бар један од њих није скаларни умножак I јер би онда T био такав. Нека је нпр. $A \neq cI$. A је самоадјунгован, па сваки оператор који комутира са A, а специјално сваки $\pi(x)$, комутира са свим пројекцијама $\chi_E(A), E \subseteq \mathbb{R}$ (ово је познато својство да уколико оператор комутира са T и T^*, онда комутира и са сваким $f(T)$ где је f Борелова, а χ_E јесте таква). Тада $\mathcal{C}(\pi)$ садржи нетривијалне пројекције, па је опет по претходном Ставу π редуцибилна, чиме смо доказали и други смер.
(б) Ако $T \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$, тада $T^* \in \mathcal{C}(\pi_2, \pi_1)$ јер је

$$T^*\pi_2(x) = [\pi_2(x^{-1})T]^* = [T\pi_1(x^{-1})]^* = \pi_1(x)T^*,$$

где средња једнакост следи из чињенице да је $T \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$. Одатле важи да $T^*T \in \mathcal{C}(\pi_1)$ и $TT^* \in \mathcal{C}(\pi_2)$, па како се ради о неразложивим репрезентацијама, из (а) следи да је $T^*T = cI$ и $TT^* = cI$. Одатле, или је $T = 0$ или важи да је $c^{-\frac{1}{2}}T$ унитаран, јер је

$$(c^{-\frac{1}{2}}T)^* c^{-\frac{1}{2}}T = T^* c^{-\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} T = c^{-1} c I = I,$$

јер је $c \in \mathbb{R}$. Ово показује да је $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2) = \{0\}$ баш онда када π_1 и π_2 нису унитарно еквивалентни (јер иначе $c^{-\frac{1}{2}}T$ омогућава њихову еквивалентност). Уколико они јесу унитарно еквивалентни, $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ је једнодимензионалан, јер ако $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ (напоменимо да смо претходним разматрањима добили да су они унитарни) тада $T_2^{-1}T_1 = T_2^* T_1 \in \mathcal{C}(\pi_1)$, па опет из (а) знамо да је $T_2^{-1}T_1 = cI$, тј. $T_1 = cT_2$, па је $\dim \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2) = 1$, што нам је и био циљ. ■

Како радимо са Абеловим групама, наредна последица ће нам бити од велике важности:

Последица 2.8. Ако је G Абелова група, онда је свака неразложива репрезентација π од G једнодимензионална.

Доказ: Како је G Абелова група, то оператори $\pi(x)$ сви међусобно комутирају, па припадају $\mathcal{C}(\pi)$. Како је π неразложива, то је по делу (а) из прошлог става $\pi(x) = c_x I$ за сваки $x \in G$. Ако узмемо произвољан једнодимензионалан потпростор $\mathcal{M}$ од H_π, из конкретног облика π видимо да је $\mathcal{M}$ инваријантан у односу на π. Тада према Ставу 2.6, пројектор на $\mathcal{M}$, $P_\mathcal{M} \in \mathcal{C}(\pi)$, а како $\mathcal{C}(\pi)$ садржи само умношке идентитете, то је баш $P_\mathcal{M} = I$, тј. $\mathcal{M} = H_\pi$, па је $\dim H_\pi = 1$, што смо и желели да покажемо. ■

Претходно излагање је било поприлично детаљно јер су унитарне репрезентације стубови хармонијске анализе на локално компактним групама. У овом тренутку, још увек не знамо да ли уопште постоје неразложиве репрезентације на групи G осим тривијалне $\pi \equiv I$. Као круна овог поглавља свакако стоји Гељфанд-Рајковљева теорема, која нам каже да не само да постоје иредуцибилне репрезентације, него их има довољно да разликују тачке. Ипак, да би се стигло до овог резултата, најпре треба увести неке нове појмове и доказати тврђења везана за њих, конкретно, функције позитивног типа.

2.2 Репрезентације $L^1(G)$

Пре тога ћемо се ипак позабавити недегенерисаним $*-$репрезентацијама $L^1(G)$ и показати да постоји 1-1 кореcподенција истих са унитарним репрезентацијама на G. Такође ћемо наредна разматрања користити у трећој глави.

Подсетимо се да је $L^1(G)$ Банахова $*-$алгебра у односу на конволуцију дату са $(f * g)(x) = \int f(y)g(y^{-1}x)dy$. Притом је инволуција дефинисана са $f^*(x) = \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}$, где је Δ модуларна функција.

Дефиниција 2.9. Свака унитарна репрезентација π на G одређује репрезентацију $\tilde{\pi}$ на $L^1(G)$, где је $\tilde{\pi}$ ограничен оператор на H_π дефинисан као

$$\tilde{\pi}(f) = \int f(x)\pi(x)dx, \quad f \in L^1(G).$$

Напомена 2.1. Надаље ћемо уместо ознаке $\tilde{\pi}$ употребљавати π, односно користићемо исту ознаку за репрезентацију групе G и репрезентацију простора $L^1(G)$.

Овај интеграл интерпретирамо као оператор-вредносни интеграл у слабом смислу (овакав концепт и чињенице везане за њега ћемо често користити, нарочито у другом делу рада), тј. за $u \in H_\pi$, дефинишимо скаларни производ $\pi(f)u$ са произвољним $v \in H_\pi$ са

$$\langle \pi(f)u, v\rangle = \int f(x)\langle \pi(x)u, v\rangle dx. \tag{2.1}$$

Како је $x \mapsto \langle \pi(x)u, v\rangle$ ограничена непрекидна функција, интеграл са десне стране је ништа друго до интеграл функције из $L^1(G)$.

Напоменимо још две очигледне чињенице. Прво, $\langle \pi(f)u, v\rangle$ зависи линеарно од u и антилинеарно од v. Друго, $|\langle \pi(f)u, v\rangle| \leqslant \|f\|_1\|u\|\|v\|$, па је $\pi(f)$ ограничен линеаран оператор на H_π и важи

$$\|\pi(f)\| \leqslant \|f\|_1. \tag{2.2}$$

Најједноставнији пример који описује претходно разматрање је следећи:

Пример 2.9. Нека је π_L лева регуларна репрезентација на G, тј. $\pi_L(x) = L_x$. Тада из особине исказане у претходној глави у поглављу Конволуција, $\pi_L(f)$ је ништа друго до конволуцијско множење слева са f:

$$\pi_L(f)g = \int f(y)L_y g dy = f * g.$$

Докажимо сада да се ради о недегенерисаној $*-$ репрезентацији на $L^1(G)$, што је и било најављено првом реченицом.

Теорема 2.10. Нека је π унитарна репрезентација групе G. Тада је пресликавање $f \mapsto \pi(f)$ недегенерисана $^*-$репрезентација $L^1(G)$ на H_π. Штавише, за $x \in G$ и $f \in L^1(G)$ важи

$$\pi(x)\pi(f) = \pi(L_x f), \quad \pi(f)\pi(x) = \Delta(x^{-1})\pi(R_{x^{-1}} f).$$

Доказ: $f \mapsto \pi(f)$ је очигледно линеарно. Да се ради о једној $^*-$репрезентацији, следи из:

$$\begin{aligned}
\pi(f * g) &= \iint f(y)g(y^{-1}x)\pi(x)dydx \\
&= \iint f(y)g(x)\pi(yx)dxdy \\
&= \iint f(y)g(x)\pi(y)\pi(x)dxdy = \pi(f)\pi(g),
\end{aligned}$$

при чему другу једнакост добијамо сменом $x = yx$, и

$$\begin{aligned}
\pi(f^*) &= \int \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}\pi(x)dx \\
&= \int \overline{f(x)}\pi(x^{-1})dx \\
&= \int (f(x)\pi(x))^* dx = \pi(f)^*,
\end{aligned}$$

при чему је у другој једнакости коришћена смена $x = x^{-1}$. Две преостале тражене једнакости следе из:

$$\begin{aligned}
\pi(x)\pi(f) &= \int f(y)\pi(x)\pi(y)dy \\
&= \int f(y)\pi(xy)dy \\
&= \int f(x^{-1}y)\pi(y)dy = \pi(L_x f),
\end{aligned}$$

при чему смо користили смену $y = x^{-1}y$, и

$$\begin{aligned}\pi(f)\pi(x) &= \int f(y)\pi(y)\pi(x)dy \\ &= \int f(y)\pi(yx)dy \\ &= \Delta(x^{-1})\int f(yx^{-1})\pi(y)dy = \Delta(x^{-1})\pi(R_{x^{-1}}f),\end{aligned}$$

где смо у овом делу користили смену $y = yx^{-1}$. Као што примећујемо, користили смо да оператор $\pi(x)$ може ући односно изаћи из интеграла, што је чињеница коју ћемо често користити, нарочито у другом делу рада, па више нећемо напомињати наведену особину.
Остало је још да покажемо да је у питању недегенерисана репрезентација, па у ту сврху, узмимо $u \neq 0 \in H_\pi$. Изаберимо сада компактну околину $V \ni 1$ у G (која постоји због јаке непрекидности π), тако да је $\|\pi(x)u - u\| < \|u\|$ за $x \in V$, и дефинишимо $f := \frac{\chi_V}{\lambda(V)}$, где је λ Харова мера на локално компактној групи G. Тада је

$$\|\pi(f)u - u\| = \frac{1}{\lambda(V)}\left\|\int_V (\pi(x)u - u)dx\right\| < \|u\|,$$

при чему смо користили ознаке у складу са дефиницијом 2.9 и напоменом која следи после ње. Ово специјално значи да је $\pi(f)u \neq 0$, па је π недегенерисана репрезентација, чиме је доказ завршен. ■

Сада можемо да пређемо на најављени доказ коресподенције.

Теорема 2.11. Нека је π недегенерисана $*-$репрезентација $L^1(G)$ на Хилбертовом простору H. Тада π потиче од јединствене унитарне репрезентације групе G на H дефинисане у 2.1.

Доказ: Нека је стандардно $\{\Psi_U\}$ апроксимативна јединица у $L^1(G)$. Тада ако $f \in L^1(G)$, важи $\Psi_U * f \to f$ у $L^1(G)$, па по својству конволуције

$$(L_x\Psi_U) * f = L_x(\Psi_U * f) \to L_x f$$

у $L^1(G)$ за свако $x \in G$, па из $\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g)$ и јаке непрекидности репрезентације π, важи:

$$\pi(L_x\Psi_U)\pi(f)v \to \pi(L_x f)v, \tag{2.3}$$

за све $v \in H$. Нека је $\mathcal{L}$ линеаран омотач скупа $\{\pi(f)v | f \in L^1(G), v \in H\}$. Ако је $u \perp \mathcal{L}$, тада је $0 = \langle u, \pi(f)v \rangle = \langle \pi(f^*)u, v \rangle$ за све v и за све f, па како је π недегенерисана, $u = 0$, одакле закључујемо да је $\mathcal{L}$ густ у H. Из релације 2.3 следи да $\pi(L_x \Psi_U)$ конвергира јако на $\mathcal{L}$ ка оператору $\tilde{\pi}(x) : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ дефинисан као $\tilde{\pi}(x)\pi(f)v := \pi(L_x f)v$. Најпре, $\tilde{\pi}(x)$ је добро дефинисан из следеће импликације (узимамо произвољан елемент из $\mathcal{L}$ који је једнак 0 и доказујемо да му је слика 0)

$$\sum \pi(f_j)v_j = 0 \Rightarrow \sum \pi(L_x f_j)v_j = \lim \sum \pi(L_x \Psi_U)\pi(f_j)v_j = 0.$$

Из оцене 2.2, закључујемо да је $\|\pi(L_x \Psi_U)\| \leqslant \|L_x \Psi_U\|_1 = 1$. Тада по Хан-Банаховој теореми проширимо $\tilde{\pi}(x)$ на јединствен начин до оператора на H без повећања норме, тј. тако да је $\|\tilde{\pi}(x)\| \leqslant 1$ и $\tilde{\pi}(x)\pi(f) = \pi(L_x f)$.
Циљ нам је да покажемо да је $\tilde{\pi}$ унитарна репрезентација групе G. Најпре докажимо да је $\tilde{\pi}$ хомоморфизам

$$\tilde{\pi}(xy)\pi(f) = \pi(L_{xy}f) = \pi(L_x L_y f) = \tilde{\pi}(x)\pi(L_y f) = \tilde{\pi}(x)\tilde{\pi}(y)\pi(f),$$

одакле је $\tilde{\pi}(xy) = \tilde{\pi}(x)\tilde{\pi}(y)$ на $\mathcal{L}$ па самим тим и на H. По дефиницији је $\tilde{\pi}(1) = I$, па је $\tilde{\pi}$ хомоморфизам из G у групу инвертибилних оператора на H. Пређимо сада на доказивање да је $\tilde{\pi}$ унитаран. Како је

$$\|u\| = \|\tilde{\pi}(x^{-1})\tilde{\pi}(x)u\| \leqslant \|\tilde{\pi}(x)u\| \leqslant \|u\|, \quad u \in H,$$

па је $\tilde{\pi}(x)$ изометрија и тиме унитаран оператор. Коначно, треба показати непрекидност. Нека $x_\alpha \to x$ у G, тада $L_{x_\alpha} f \to L_x f$ у $L^1(G)$ за сваки $f \in L^1(G)$. Одатле је

$$\tilde{\pi}(x_\alpha)\pi(f) = \pi(L_{x_\alpha} f) \to \pi(L_x f) = \tilde{\pi}(x)\pi(f).$$

Тада је $\tilde{\pi}(x_\alpha) \to \tilde{\pi}(x)$ јако на $\mathcal{L}$, па како је $\|\tilde{\pi}(x_\alpha)\| = 1$ за свако α, тада једноставно апроксимацијом елементима из H (применом $\frac{\varepsilon}{3}$ аргумента) следи да $\tilde{\pi}(x_\alpha) \to \tilde{\pi}(x)$ јако на H, па је $\tilde{\pi}$ непрекидан.
Преостаје нам да покажемо да је $\pi(f) = \tilde{\pi}(f)$ за $f \in L^1(G)$, где је $\tilde{\pi}(f)$ дефинисан преко $\tilde{\pi}$ на начин описан у једнакости 2.1. Узмимо сада произвољне $f, g \in L^1(G)$. Тада је из примера $f * g = \int f(y) L_y g dy$, па како је π ограничено линеарно пресликавање из $L^1(G)$ у $B(H)$ важи поменути

улазак/излазак под интеграл

$$\begin{aligned}\pi(f)\pi(g) = \pi(f * g) &= \int f(y)\pi(L_y g)dy \\ &= \int f(y)\tilde{\pi}(y)\pi(g)dy \\ &= \left[\int f(y)\tilde{\pi}(y)dy\right]\pi(g) = \tilde{\pi}(f)\pi(g).\end{aligned}$$

Дакле, $\tilde{\pi}(f) = \pi(f)$ на $\mathcal{L}$, па самим тим и на H.
На крају, остаје нам да докажемо јединственост. Нека је $\widehat{\pi}$ нека друга унитарна репрезентација групе G тако да је $\widehat{\pi}(f) = \pi(f)$ за све $f \in L^1(G)$. Тада из једнакости 2.1 следи да је $\langle\widehat{\pi}(x)u, v\rangle = \langle\tilde{\pi}(x)u, v\rangle$ за све $x \in G$ и за све $u, v \in H$, па је самим тим $\widehat{\pi}(x) = \tilde{\pi}(x)$ за све $x \in G$, чиме је показана јединственост и доказ у потпуности завршен. ■

За крај, повежимо добијене резултате са C^*-алгебрама.

Нека је π унитарна репрезентација групе G. Ако је G дискретна, тада придружена репрезентација на $L^1(G)$ садржи репрезентације групе G. Наиме, очигледно је $\pi(x) = \pi(\delta_x)$ (у складу са дефиницијом 2.9), где је са δ_x означена функција која у x има вредност 1, а у осталим тачкама вредност 0. Са друге стране, ако G није дискретна и π је бесконачно димензионална, $\pi(G)$ и $\pi(L^1(G))$ се могу поприлично разликовати. Ипак важи следећа теорема:

Теорема 2.12. Нека је π унитарна репрезентација групе G. Тада:
(а) C^*-алгебре генерисане са $\pi(G)$ и $\pi(L^1(G))$ имају исто затворење у јакој и слабој операторској топологији.
(б) Ограничен оператор $T \in B(H_\pi)$ припада $\mathcal{C}(\pi)$ акко је $T\pi(f) = \pi(f)T$ за све $f \in L^1(G)$.
(в) Затворен подскуп $\mathcal{M} \subseteq H_\pi$ је инваријантан у односу на π акко $\pi(f)\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ за све $f \in L^1(G)$.

Доказ: (а) Најпре покажимо да ако $g \in C_c(G)$, $\pi(g)$ је јаки лимес Риманове суме $\sum_E = \sum\limits_j g(x_j)\pi(x_j)|E_j|$, где је $E = \{E_j\}$ коначна партиција компактног носача *supp* g и $x_j \in E_j$. Задајмо $\varepsilon > 0$ и узмимо произвољне $u_1, \ldots, u_n \in H_\pi$. Како је пресликавање $x \mapsto g(x)\pi(x)u_m$ униформно непрекидно, то можемо пронаћи партицију $E = \{E_j\}$ компактног носача *supp* g тако да је $\|g(x)\pi(x)u_m - g(y)\pi(y)u_m\| < \varepsilon$, за $m = 1, 2, \ldots, n$, када x, y леже у истом E_j. Тада важи да је $\|\sum_E u_m - \pi(g)u_m\| < \varepsilon|supp\ g|$ за $m = 1, 2, ..., n$. Тада свака

јака околина $\pi(g)$ садржи суму $\sum_E$, одакле следи тражено.
Сада, ако је $f \in L^1(G)$, f је L^1 лимес функција из $C_c(G)$, па је $\pi(f)$ лимес у норми оператора $\pi(g)$, где $g \in C_c(G)$. $\pi(g)$ је јаки лимес Римановых сума и ове суме су у алгебри генерисаног са $\pi(G)$. Обратно, из доказа теореме 2.11 следи да је $\pi(x)$ јаки лимес $\pi(L_x\Psi_U)$ када $U \to \{1\}$. Тада алгебре $\pi(G)$ и $\pi(L^1(G))$ имају исто јако затворење а самим тим и исто слабо затворење.
(б) Ако $T \in \mathcal{C}(\pi)$, тада T очигледно комутира са сваким елементом слабог затворења алгебре генерисане са $\pi(G)$, па самим тим и са сваким $\pi(f)$ и обратно.
(в) Доказ следи из (б) и става 2.6 (тј. његове аналогне репрезентације $L^1(G)$). ■

2.3 Функције позитивног типа

Сада опишимо већ најављену везу алгебре (унитарних репрезентација) и анализе (функција позитивног типа).

Дефиниција 2.10. **Функцијом позитивног типа** на локално компактној групи G зовемо функцију $\phi \in L^\infty(G)$ такву да она дефинише позитивни линеарни функционал на Банаховој *-алгебри $L^1(G)$, тј. да важи:

$$\int (f^* * f)\phi \geqslant 0 \quad \text{за све} \quad f \in L^1(G).$$

Како је $f^*(x) = \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}$, то је

$$\int (f^* * f)\phi = \iint \Delta(y^{-1})\overline{f(y^{-1})}f(y^{-1}x)\phi(x)dydx = \iint \overline{f(y)}f(yx)\phi(x)dydx,$$

једноставном сменом $y^{-1} = y$. Сада, мењањем редоследа интеграције и сменом $y^{-1}x = x$, добијамо да је функција ϕ позитивног типа акко је

$$\iint f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dydx \geqslant 0.$$

Касније ћемо показати да се све функције позитивног типа поклапају са непрекидном функцијом скоро свуда. У овом тренутку ипак дајемо следећу дефиницију:

Дефиниција 2.11. Скуп свих непрекидних функција позитивног типа на G означаваћемо са $\mathcal{P} = \mathcal{P}(G)$.

Пређимо сада на извођење особина које важе за функције позитивног типа.

Став 2.13. Ако је ϕ функција позитивног типа, тада је и $\overline{\phi}$ таква.

Доказ: По претходном извођењу,

$$\begin{aligned}\int (f^* * f)\overline{\phi} &= \iint f(x)\overline{f(y)\phi(y^{-1}x)}dydx \\ &= \overline{\iint \overline{f(x)}f(y)\phi(y^{-1}x)dydx} = \overline{\int [\overline{f}^* * \overline{f}]\phi} \geqslant 0,\end{aligned}$$

а последњи интеграл јесте ненегативан за сваки $f \in L^1(G)$ јер је ϕ позитивног типа, па је и његов конјугат ненегативан, чиме смо показали тврђење. ■

Постоји тесна веза између функција позитивног типа и унитарних репрезентација. Сада ћемо доказати низ тврђења у циљу да ту везу и опишемо.

Став 2.14. Ако је π унитарна репрезентација G и $u \in H_\pi$, тада функција ϕ задата као $\phi(x) = \langle \pi(x)u, u \rangle$ јесте из скупа $\mathcal{P}$.

Доказ: ϕ је непрекидна по дефиницији унитарне репрезентације π. Како је $\phi(y^{-1}x) = \langle \pi(y^{-1})\pi(x)u, u\rangle = \langle \pi(x)u, \pi(y)u\rangle$, па је за свако $f \in L^1(G)$

$$\iint f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dxdy = \iint \langle f(x)\pi(x)u, f(y)\pi(y)u\rangle dxdy = \|\pi(f)u\|^2 \geqslant 0,$$

тј. $\phi \in \mathcal{P}$. ■

Последица 2.15. Ако је $f \in L^2(G)$, дефинишимо $\widetilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Тада $f * \widetilde{f} \in \mathcal{P}$.

Доказ: Нека је π лева регуларна репрезентација коју смо описали у примеру 2.2. и применимо претходно тврђење на f (тј. заменимо u са f). Тада је за све $x \in G$

$$\langle \pi(x)f, f\rangle = \int f(x^{-1}y)\overline{f(y)}dy = \overline{f * \widetilde{f}(x)}.$$

Одатле је $f * \widetilde{f} \in \mathcal{P}$ директно из претходна два става. ■

Следећи циљ нам је да покажемо да су све ненула функције позитивног типа облика као у Ставу 2.14. Кренимо од неке функције

$\phi \neq 0$ позитивног типа и приметимо да она дефинише семи-дефинитну хермитску форму на $L^1(G)$ дату са:

$$\langle f, g\rangle_\phi = \int (g^* * f)\phi = \iint f(x)\overline{g(y)}\phi(y^{-1}x)dxdy,$$

за коју, и више него очигледно важи

$$|\langle f, g\rangle_\phi| \leqslant \|\phi\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Нека је скуп $\mathcal{N}$ дефинисан као $\mathcal{N} = \{f \in L^1(G) | \langle f, f\rangle_\phi = 0\}$. Из Коши-Шварцове неједнакости, $f \in \mathcal{N}$ акко је $\langle f, g\rangle_\phi = 0$ за све $g \in L^1(G)$. Онда форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$ индукује скаларни производ на количничком простору $L^1(G)/\mathcal{N}$, који ћемо, да не компликујемо запис новим ознакама, опет означити са $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$. Означимо сада Хилбертов простор који је комплетирање $L^1(G)/\mathcal{N}$ са H_ϕ. Такође, означимо количничко пресликавање са $L^1(G) \to L^1(G)/\mathcal{N}$ са $f \mapsto \widetilde{f}$. Није тешко уверити се да је за $f, g \in L^1(G)$ добро дефинисан скаларни производ $\langle \widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle_\phi := \langle f, g\rangle_\phi$. Такође, означимо са $\| \cdot \|_{H_\phi}$ норму на H_ϕ. Из претходне неједнакости, заменом $g = f$ добијамо оцену:

$$\|\widetilde{f}\|_{H_\phi} \leqslant \|\phi\|_\infty^{\frac{1}{2}} \|f\|_1. \tag{2.4}$$

Сада конструишимо репрезентацију групе G на простору H_ϕ. Уочимо да за леви оператор важи следеће:

$$\begin{aligned}\langle L_x f, L_x g\rangle_\phi &= \iint f(x^{-1}y)\overline{g(x^{-1}z)}\phi(z^{-1}y)dydz \\ &= \iint f(y)\overline{g(z)}\phi((xz)^{-1}(xy))dydz = \langle f, g\rangle_\phi,\end{aligned}$$

где су $f, g \in L^1(G)$ и $x \in G$. Специјално, можемо приметити да је $L_x(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$. Одатле је оператор $\widetilde{L}_x \widetilde{f} := \widetilde{L_x f}$ добро дефинисан на $L^1(G)/N$ и за њега према претходном вреди

$$\langle \widetilde{L}_x \widetilde{f}, \widetilde{L}_x \widetilde{g}\rangle_\phi = \langle \widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle_\phi,$$

тј. $\widetilde{L}_x$ је изометрија, а такође је и изоморфизам, јер је L_x изоморфизам на $L^1(G)$. Дакле, $\widetilde{L}_x$ је унитаран оператор на $L^1(G)/\mathcal{N}$, који се јединствено проширује на H_ϕ, па коначно можемо дефинисати репрезентацију π_ϕ групе G на простору H_ϕ:

$$\pi_\phi(x)\widetilde{f} = \widetilde{L_x f}, \qquad f \in L^1(G).$$

Напоменимо на крају да се лако проверава да је одговарајућа репрезентација $L^1(G)$ на H_ϕ дата са:

$$\pi_\phi(f)\widetilde{g} = \widetilde{f * g}.$$

Теорема 2.16. Нека је ϕ функција позитивног типа на G. Уз претходне ознаке, постоји циклични вектор ε за π_ϕ такав да је $\pi_\phi(f)\varepsilon = \widetilde{f}$, за све $f \in L^1(G)$ и $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\varepsilon, \varepsilon \rangle$ за скоро све $x \in G$.

Доказ: Нека је $\mathcal{U}$ произвољна базна околина јединице у G и $(\Psi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ апроксимативна јединица. Тада $(\Psi_U^*)_{U\in\mathcal{U}}$ задовољава својства (1) и (2) из дефиниције апроксимативне јединице 1.6 (док треће својство задовољава само када је G унимодуларна), па за све $f \in L^1(G)$ важи $\Psi_U^* * f \to f$ у $L^1(G)$, одакле је $\int(\Psi_U^* * f)\phi \to \int f\phi$. Еквивалентно, $\langle f, \Psi_U \rangle_\phi \to \int f\phi$, а одатле је $\langle \widetilde{f}, \widetilde{\Psi}_U \rangle_\phi \to \int f\phi$. Сада из неједнакости 2.4 следи

$$\|\widetilde{\Psi}_U\|_{H_\phi} \leqslant \|\phi\|_\infty^{\frac{1}{2}} \|\Psi_U\|_1 = \|\phi\|_\infty^{\frac{1}{2}}.$$

Сада како је мрежа $(\Psi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ ограничена и како $\lim\limits_U \langle v, \Psi_U \rangle_\phi$ постоји за свако $v \in H_\phi$, то $\widetilde{\Psi}_U$ конвергира слабо у H_ϕ елементу ε. Одатле је:

$$\langle \widetilde{f}, \varepsilon \rangle_\phi = \lim_U \langle \widetilde{f}, \widetilde{\Psi}_U \rangle = \int f\phi, \quad \text{за сваки } f \in L^1(G).$$

Тада је за произвољне $f, g \in L^1(G)$ и $y \in G$:

$$\langle \widetilde{g}, \pi_\phi(y)\varepsilon \rangle_\phi = \langle \pi_\phi(y^{-1})\widetilde{g}, \varepsilon \rangle_\phi = \langle \widetilde{(L_{y^{-1}} g)}, \varepsilon \rangle_\phi = \int g(yx)\phi(x)dx = \int g(x)\phi(y^{-1}x)dx,$$

а такође је:

$$\langle \widetilde{g}, \widetilde{f} \rangle_\phi = \langle g, f \rangle_\phi = \iint g(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dxdy = \int \langle \widetilde{g}, \pi_\phi(y)\varepsilon \rangle_\phi \overline{f(y)}dy = \langle \widetilde{g}, \pi_\phi(f)\varepsilon \rangle_\phi,$$

при чему последњи ред следи по дефиницији из претходног одељка - репрезентације на $L^1(G)$.
Одатле је $\widetilde{f} = \pi_\phi(f)\varepsilon$ за све $f \in L^1(G)$. Пређимо сада на доказ друге

тврдње. Посматрајмо:

$$\begin{aligned}\int \langle \varepsilon, \pi_\phi(y)\varepsilon\rangle_\phi \overline{f(y)}dy &= \lim_U \int \langle \widetilde{\Psi}_U, \pi_\phi(y)\varepsilon\rangle_\phi \overline{f(y)}dy \\ &= \lim_U \langle \widetilde{\Psi}_U, \widetilde{f}\rangle_\phi = \langle \widetilde{\varepsilon}, \widetilde{f}\rangle_\phi = \overline{\langle \widetilde{f}, \widetilde{\varepsilon}\rangle_\phi} = \int \overline{\phi(y)}\ \overline{f(y)}dy,\end{aligned}$$

а како ово важи за сваки $f \in L^1(G)$, то је:

$$\langle \pi_\phi(y)\varepsilon, \varepsilon\rangle_\phi = \overline{\langle \varepsilon, \pi_\phi(y)\varepsilon\rangle_\phi} = \overline{\overline{\phi(y)}} = \phi(y),$$

за скоро свако $y \in G$. Остало је још да докажемо да је ε цикличан вектор, што је еквивалентно чињеници да је скуп $\{\pi_\phi(x)\varepsilon | x \in G\}$ свуда густ у H_ϕ. За то је довољно показати да ако за $f \in L^1(G)$ важи $\langle \widetilde{f}, \pi_\phi(x)\varepsilon\rangle_\phi = 0$ за све $x \in G$, онда је $\widetilde{f} = 0$, тј. $f \in \mathcal{N}$. Али како је $\langle \widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle_\phi = \int \langle \widetilde{f}, \pi_\phi(x)\varepsilon\rangle_\phi \overline{g(x)}dx$, тј. ε је цикличан акко је $\langle \widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle_\phi = 0$ за све $g \in L^1(G)$, а то повлачи да је $\widetilde{f} = 0$, што смо и хтели да покажемо. ∎

Сада смо показали да свака функција ϕ позитивног типа на G има облик $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\varepsilon, \varepsilon\rangle$ за скоро све $x \in G$ и неки циклични вектор ε, а како је десна страна непрекидна функција, то важи једноставна последица:

Последица 2.17. Свака функција позитивног типа подудара се са непрекидном функцијом скоро свуда.
Наводимо још једну последицу:

Последица 2.18. Ако $\phi \in \mathcal{P}$, тада $\|\phi\|_\infty = \phi(1)$ и $\phi(x^{-1}) = \overline{\phi(x)}$.

Доказ: Имамо да је $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\varepsilon, \varepsilon\rangle$ за неку унитарну репрезетацију π_ϕ и вектор ε, па је $|\phi(x)| = |\langle \pi_\phi(x)\varepsilon, \varepsilon\rangle| \leqslant \|\varepsilon\|^2 = \langle \pi_\phi(1)\varepsilon, \varepsilon\rangle = \phi(1)$ из Коши-Шварцове неједнакости и $\phi(x^{-1}) = \langle \pi_\phi(x^{-1})\varepsilon, \varepsilon\rangle = \langle \varepsilon, \pi_\phi(x)\varepsilon\rangle = \overline{\phi(x)}$. ∎

Сада смо успоставили везу између цикличних унитарних репрезентација и функција позитивног типа коју смо најавили. Да би уоквирили ову причу, остало је још да покажемо јединственост која следи из наредног става:

Став 2.19. Нека су π и ρ две цикличне репрезентације групе G са цикличним векторима u и v такви да је $\langle \pi(x)u, u\rangle = \langle \rho(x)v, v\rangle$ за све $x \in G$. Тада су π и ρ унитарно еквивалентни. Прецизније, постоји унитаран $T \in \mathcal{C}(\pi, \rho)$ такав да је $Tu = v$.

Доказ: За све $x, y \in G$ важи следећи низ једнакости:

$$\langle \pi(x)u, \pi(y)u \rangle = \langle \pi(y^{-1}x)u, u \rangle = \langle \rho(y^{-1}x)v, v \rangle = \langle \rho(x)v, \rho(y)v \rangle.$$

Дефинишимо сада $T(\pi(x)u) = \rho(x)v$, затим га по линеарности проширимо до изометрије са скупа $\{\pi(x)u | x \in G\}$ на скуп $\{\rho(x)v | x \in G\}$, а како су оба густа редом у H_π, односно H_ρ, проширимо их по непрекидности до унитарног $T : H_\pi \to H_\rho$. Једноставном заменом $x = 1$, добијамо $Tu = v$. Докажимо још да $T \in \mathcal{C}(\pi, \rho)$. Како је

$$\rho(y)T(\pi(x)u) = \rho(yx)v = T(\pi(y)\pi(x)u),$$

то је $\rho(y)T = T\pi(y)$, а како то важи за све $y \in G$, доказали смо тражено. ∎

Као једноставна последица овог тврђења јесте јединственост функције позитивног типа у односу на цикличну репрезентацију до на унитарну еквивалентност, тј. важи:

Последица 2.20. Ако је π циклична репрезентација на G са цикличним вектором u и $\phi(x) = \langle \pi(x)u, u \rangle$, тада је репрезентација π унитарно еквивалентна са π_ϕ, коју смо дефинисали у оквиру овог поглавља.

Дефинишимо сада још пар појмова који ће нам бити од изузетне важности за даљи рад, а све у циљу доказивања Гељфанд-Рајковљеве теореме.

Приметимо најпре да је скуп свих непрекидних функција позитивног типа на G, односно скуп $\mathcal{P}$, конвексан конус, а затим дефинишимо два његова посебно значајна скупа (једнакости са десне стране следе из последице 2.18)

$$\mathcal{P}_1 = \{\phi \in \mathcal{P} |\ \|\phi\|_\infty = 1\} = \{\phi \in \mathcal{P} | \phi(1) = 1\},$$

$$\mathcal{P}_0 = \{\phi \in \mathcal{P} |\ \|\phi\|_\infty \leqslant 1\} = \{\phi \in \mathcal{P} | 0 \leqslant \phi(1) \leqslant 1\}.$$

Како су оба ова скупа ограничена и конвексна, можемо посматрати њихове крајње тачке. Скупове њихових крајњих тачки означимо редом са $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ и $\mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$.

Следећа теорема нам је од посебног значаја.

Теорема 2.21. Ако је $\phi \in \mathcal{P}_1$, тада $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ акко је репрезентација π_ϕ неразложива.

Доказ: Претпоставимо да $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$, али да је π_ϕ редуцибилна. Тада постоји нетривијалан, инваријантан у односу на π_ϕ потпростор $\mathcal{M}$ и $H_\phi = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$. По Леми 2.3 је онда и $\mathcal{M}^\perp$ инваријантан потпростор у односу на π_ϕ. Како је ε циклични вектор репрезентације π_ϕ, он не може бити у $\mathcal{M}$ или у $\mathcal{M}^\perp$, па постоје α и β, $\alpha\beta \neq 0$ и јединични вектори $u \in \mathcal{M}$ и $v \in \mathcal{M}^\perp$ тако да је $\varepsilon = \alpha u + \beta v$. Дефинишимо тада $\psi_1(x) = \langle \pi_\phi(x)u, u\rangle_\phi$ и $\psi_2(x) = \langle \pi_\phi(x)v, v\rangle_\phi$. Тада како су u и v јединични, онда је $\psi_1(1) = \psi_2(1) = 1$, па $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{P}_1$. Приметимо да из $\beta v \perp \alpha u$ и обратно, следи да је

$$\langle \pi_\phi(x)\varepsilon, \frac{1}{\alpha}u - \frac{1}{\beta}v\rangle = \psi_1(x) - \psi_2(x).$$

Сада како је ε циклични вектор и $\frac{1}{\alpha}u - \frac{1}{\beta}v$ различито од 0 (иначе припадају истом потпростору), то је $\psi_1 \neq \psi_2$. Такође важи да је

$$\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\varepsilon, \varepsilon\rangle_\phi = \alpha^2\langle \pi_\phi(x)u, u\rangle + \beta^2\langle \pi_\phi(x)v, v\rangle = \alpha^2\psi_1(x) + \beta^2\psi_2(x),$$

и $\alpha^2 + \beta^2 = \phi(1) = 1$, па ϕ није крајња тачка.
У супротном смеру, претпоставимо да је π_ϕ несводљива репрезентација и да се ϕ може представити као $\phi = \psi_1 + \psi_2$, за неке ψ_1 и ψ_2 из $\mathcal{P}$. Тада је за све $f, g \in L^1(G)$ тачно

$$\langle f, f\rangle_{\psi_1} = \langle f, f\rangle_\phi - \langle f, f\rangle_{\psi_2} \leqslant \langle f, f\rangle_\phi,$$

а онда из Коши-Шварцове неједнакости

$$|\langle f, g\rangle_{\psi_1}| \leqslant \langle f, f\rangle_{\psi_1}^{\frac{1}{2}}\langle g, g\rangle_{\psi_1}^{\frac{1}{2}} \leqslant \langle f, f\rangle_\phi^{\frac{1}{2}}\langle g, g\rangle_\phi^{\frac{1}{2}}.$$

Тада пресликавање $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle_{\psi_1}$ дефинише хермитску форму на H_ϕ, па постоји ограничен самоадјунгован оператор T на H_ϕ такав да је за све $f, g \in L^1(G)$

$$\langle f, g\rangle_{\psi_1} = \langle T\widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle_\phi.$$

Тада важи следећи низ једнакости

$$\begin{aligned}\langle T\pi_\phi(x)\widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle_\phi = \langle T\widetilde{(L_x f)}, \widetilde{g}\rangle_\phi = \langle L_x f, g\rangle_{\psi_1} = \langle f, L_{x^{-1}}g\rangle_{\psi_1} \\ = \langle T\widetilde{f}, \widetilde{L_{x^{-1}}g}\rangle_\phi = \langle T\widetilde{f}, \pi_\phi(x^{-1})\widetilde{g}\rangle_\phi = \langle \pi_\phi(x)T\widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle_\phi,\end{aligned}$$

па $T \in \mathcal{C}(\pi_\phi)$. Онда из Шурове леме знамо да је $T = cI$ и $\langle f, g\rangle_{\psi_1} = c\langle f, g\rangle_\phi$. Одатле је у смислу класичне дефинције $\psi_1 = c\phi$ и $\psi_2 = (1 - c)\phi$, па је очигледно ϕ крајња тачка, чиме смо доказали тражено. ■

Очигледно се услов $\int(f^* * f)\phi \geqslant 0$ на ϕ чува при слабим* лимесима, па је $\mathcal{P}_0$ слабо* затворена лопта у $L^\infty(G)$ (тј. дуалу од $L^1(G)$). Затим је из Банах-Алгаоглуове теореме, $\mathcal{P}_0$ слабо* компактан, а онда из Крејн-Милманове теореме је слабо* затворење конвексног омотача његових крајњих тачака. Иако $\mathcal{P}_1$ није слабо* затворен, закључак из Крејн-Милманове теореме и даље важи. Најпре докажимо следеће помоћно тврђење.

Лема 2.22. При стандардним ознакама, важи $\mathcal{E}(\mathcal{P}_0) = \mathcal{E}(\mathcal{P}_1) \cup \{0\}$.

Доказ: Узмимо $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}_0$ и $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$ такве да је $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Прво претпоставимо да је $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 = 0$. Стављајући $x = 1$, добијамо $\lambda_1\phi_1(1) + \lambda_2\phi_2(1) = 0$, одакле је $\phi_1(1) = \phi_2(1) = 0$, па је по последици 2.18 $\phi_1 = \phi_2 = 0$, одакле је 0 крајња тачка, тј. $0 \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$. Са друге стране, ако је $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 = \phi$, где је $\phi \in \mathcal{P}_1$, тада опет евалуирајући у 1 добијамо да је $\phi_1(1) = \phi_2(1) = 1$, па $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}_1$. Тиме смо показали да ако је ϕ крајња тачка у $\mathcal{P}_1$, онда је она крајња и у $\mathcal{P}_0$. Коначно, претпоставимо да постоји елемент $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_0) \backslash (\mathcal{E}(\mathcal{P}_1) \cup \{0\})$. Очито, сваки елемент скупа $\mathcal{P}_0$ је конвексна комбинација 0 и неког елемента из скупа $\mathcal{P}_1$, па је ϕ нужно елемент скупа $\mathcal{P}_1$, што је контрадикција са $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_0) \backslash \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ пошто је $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_0$. ■

Сада докажимо и саму теорему:

Теорема 2.23. Конвексни омотач $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ је густ у $\mathcal{P}_1$ у слабој* топологији.

Доказ: Узмимо произвољно $\phi \in \mathcal{P}_1$. Према претходној Леми и дискусији, знамо да важи да је ϕ слаби* лимес мреже функција $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$, где за све $\alpha \in A$ важи да ϕ_α припада конвексном омотачу од $\mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$, тј. облика је $\lambda_1\psi_1 + \cdots + \lambda_n\psi_n + \lambda_{n+1}0$, где $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$, при чему је $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \geqslant 0$ и $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$. Како је $\|\phi\|_\infty = 1$, то је $\|\phi_\alpha\|_\infty \leqslant 1$ и пошто је скуп $\{f \in L^\infty(G) | \, \|f\|_\infty \leqslant 1 - \varepsilon\}$ слабо* компактан по Банах-Алаоглуовој теореми, то важи $\lim\limits_\alpha \phi_\alpha(1) = \lim\limits_\alpha \|\phi_\alpha\|_\infty = 1$. Али онда ако означимо са $\phi'_\alpha = \frac{\phi_\alpha}{\phi_\alpha(1)}$ имамо да је

$$\phi'_\alpha = \frac{1}{\phi_\alpha(1)} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \psi_j \quad , \quad \frac{1}{\phi_\alpha(1)} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \frac{\phi_\alpha(1)}{\phi_\alpha(1)} = 1.$$

Тада ϕ'_α припада конвексном омотачу скупа $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ и важи $\phi = \lim\limits_\alpha \phi'_\alpha$, што нам је и био циљ. ■

Наш наредни циљ јесте да покажемо врло важну чињеницу да се слаба* топологија на $\mathcal{P}_1$ (наслеђена из $L^\infty(G)$), поклапа са топологијом униформне конвергенције на компактним скуповима у G, или како ћемо је краће у остатку рада означавати, **топологијом компактне конвергенције**. Подсетимо се да у овој топологији базну околину функције ϕ_0 дефинишемо као

$$N(\phi_0; \varepsilon, K) = \{\phi \mid |\phi(x) - \phi_0(x)| < \varepsilon \text{ за све } x \in K\},$$

где је $\varepsilon > 0$ и K иде по компактним скуповима у G. Најпре морамо показати неколико помоћних тврђења.

Лема 2.24. Нека је X Банахов простор и B подскуп дуалног простора X^* на коме је норма ограничена. Слаба* топологија на B, поклапа се са топологијом компактне конвергенције на X.

Доказ: Слаба* топологија је топологија тачка по тачка конвергенције на X, па је свакако слабија од топологије компактне конвергенције. Обратно, нека је $\lambda_0 \in B$, $\varepsilon > 0$ произвољно, $K \subseteq X$ компактан, $C = \sup\limits_{\lambda \in B} \|\lambda\|$ и $\delta = \frac{\varepsilon}{3C}$. Тада постоје $\xi_1, \ldots, \xi_n \in K$ такви да унија лопти $B(\xi_j, \delta)$ покрива K. Ако узмемо неко $\lambda \in B$ и $\xi \in K$ тако да је $\|\xi - \xi_j\| < \delta$ за неко j, тада је:

$$|\lambda(\xi) - \lambda_0(\xi)| < |\lambda(\xi - \xi_j)| + |(\lambda - \lambda_0)(\xi_j)| + |\lambda_0(\xi_j - \xi)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |(\lambda - \lambda_0)(\xi_j)|,$$

па је слаба* околина $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \{\lambda \mid |(\lambda - \lambda_0)(\xi_j)| < \frac{\varepsilon}{3}\}$ λ_0 садржана у околини $N(\lambda_0; \varepsilon, K)$ топологије компактне конвергенције, чиме смо доказали и супротан смер. ■

Лема 2.25. Нека је $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$ и $f \in L^1(G)$. За произвољно $\varepsilon > 0$ и сваки компактан скуп $K \subseteq G$, постоји слаба* околина Φ функције ϕ_0 у $\mathcal{P}_1$, таква да је $|f * \phi(x) - f * \phi_0(x)| < \varepsilon$ за све $\phi \in \Phi$ и $x \in K$.

Доказ: Најпре приметимо да ϕ_0 можемо посматрати као елемент дуала $L^1(G)$, дефинисан као $\phi_0(f) = \int f\overline{\phi_0}$. Из последице 2.18, знамо да је $f * \phi(x) = \int f(xy)\phi(y^{-1})dy = \int (L_{x^{-1}}f)\overline{\phi}$, па је $f * \phi(x) = \phi(L_{x^{-1}}f)$. Како је по Ставу 1.25 пресликавање $x \mapsto L_{x^{-1}}f$ непрекидно из G у $L^1(G)$, то је скуп $\{L_{x^{-1}}f | x \in K\}$ компактан у $L^1(G)$. Коначно, применом претходне леме, добијамо слабу* околину Φ функције ϕ_0 (која је истовремено и околина у топологији компактне конвергенције), такву да је за све $\phi \in \Phi$ и $x \in K$ $|\phi(L_{x^{-1}}f) - \phi_0(L_{x^{-1}}f)| = |f * \phi(x) - f * \phi_0(x)| < \varepsilon$, чиме је доказ завршен. ■

Лема 2.26. Ако $\phi \in \mathcal{P}_1$, тада важи оцена $|\phi(x) - \phi(y)|^2 \leqslant 2 - 2\mathrm{Re}(\phi(yx^{-1}))$.

Доказ: Знамо да је $\phi(x) = \langle \pi(x)u, u \rangle$ за неку унитарну репрезентацију π и јединични вектор $u \in H_\pi$, јер $\phi \in \mathcal{P}_1$, па важи следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned}|\phi(x) - \phi(y)|^2 = |\langle(\pi(x) - \pi(y))u, u\rangle|^2 &= |\langle u, (\pi(x^{-1}) - \pi(y^{-1}))u\rangle|^2 \\ &\leqslant \|\pi(x^{-1})u - \pi(y^{-1})u\|^2 \\ &= 2 - 2\mathrm{Re}(\langle \pi(yx^{-1})u, u\rangle) \\ &= 2 - 2\mathrm{Re}(\phi(yx^{-1})),\end{aligned}$$

при чему смо користили Коши-Шварцову неједнакост и чињеницу да је $\|u\| = 1$. ■

Лема 2.27. Нека је $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$ и $\delta > 0$. Тада постоји компактна околина $V \subseteq G$, $1 \in V$ и слаба* околина Φ_1 од ϕ_0 у $\mathcal{P}_1$, тако да за све $x \in G$ и све $\phi \in \Phi_1$ важи $|\chi_V * \phi(x) - \lambda(V)\phi(x)| < 2\lambda(V)\sqrt{\delta}$, где је χ_V карактеристична функција скупа V, а λ Харова мера.

Доказ: За V узмимо компактну околину јединице у G, такву да је $|\phi_0(x) - 1| < \delta$ за све $x \in V$ (што можемо из непрекидности). Околину Φ_1 дефинишемо као

$$\Phi_1 = \left\{\phi \in \mathcal{P}_1 \middle| |\phi(\chi_V) - \phi_0(\chi_V)| = \left|\int_V (\phi - \phi_0)\right| < \delta\lambda(V)\right\}.$$

Како $\chi_V \in L^1$, то је Φ_1 слаба* околина ϕ_0. Ако је сада $\phi \in \Phi_1$, тада имамо да је

$$\left|\int_V (1 - \phi)\right| \leqslant \left|\int_V (1 - \phi_0)\right| + \left|\int_V (\phi_0 - \phi)\right| < 2\delta\lambda(V),$$

директно из избора V и Φ_1. Сада проценимо

$$|\chi_V * \phi(x) - \lambda(V)\phi(x)| = \left|\int_V (\phi(y^{-1}x) - \phi(x))d\lambda(y)\right| \leqslant \int_V |(\phi(y^{-1}x) - \phi(x))|d\lambda(y).$$

Сада из леме 2.26, затим Хелдерове неједнакости и претходне процене, важи

$$\begin{aligned}
|\chi_V * \phi(x) - \lambda(V)\phi(x)| &\leqslant \int\limits_V (2-2\mathrm{Re}(\phi(y)))^{\frac{1}{2}} d\lambda(y) \\
&\leqslant \left[\int\limits_V (2-2\mathrm{Re}(\phi(y)))d\lambda(y)\right]^{\frac{1}{2}} \lambda(V)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sqrt{2\left|\int\limits_V (1-\phi)d\lambda(y)\right|}\sqrt{\lambda(V)} \\
&< \sqrt{2\cdot 2\delta\lambda(V)}\sqrt{\lambda(V)} = 2\lambda(V)\sqrt{\delta},
\end{aligned}$$

што смо и хтели да покажемо. ■

Сада коначно докажимо унапред најављену теорему.

Теорема 2.28. На $\mathcal{P}_1$ слаба* топологија се поклапа са топологијом компактне конвергенције на G.

Доказ: Ако узмемо произвољно $f \in L^1(G)$ и $\varepsilon > 0$, тада постоји компактан скуп $K \subseteq G$ такав да је $\int\limits_{G\setminus K} |f| < \frac{\varepsilon}{4}$ (ово знамо из својства унутрашње регуларности Радонове мере). Сада, ако су $\phi, \phi_0 \in \mathcal{P}_1$ такви да је $|\phi(x) - \phi_0(x)| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1}$ за све $x \in K$ (тј. имамо компактну конвергенцију на G), тада је:

$$\begin{aligned}
|\phi(f) - \phi_0(f)| = \left|\int\limits_G (f\overline{\phi} - f\overline{\phi_0})\right| &\leqslant \int\limits_K |f||\phi-\phi_0| + \int\limits_{G\setminus K} |f||\phi-\phi_0| \\
&< \|f\|_1 \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1} + \frac{\varepsilon}{4}(1+1) = \varepsilon,
\end{aligned}$$

па закључујемо да компактна конвергенција на G повлачи слабу* конвергенцију (на $\mathcal{P}_1$).

Обратно, узмимо $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$, $\varepsilon > 0$ и $K \subseteq G$ компактан произвољно. Наш циљ је да нађемо слабу* околину Φ (од ϕ_0 у $\mathcal{P}_1$) такву да је $|\phi - \phi_0| < \varepsilon$ на K кад $\phi \in \Phi$. За дато $\delta > 0$, по Леми 2.27, постоји слаба* околина Φ_1 од ϕ_0 и компактна околина V, $1 \in V$, таква да је за све $x \in G$ и све $\phi \in \Phi_1$ $|\chi_V * \phi(x) - \lambda(V)\phi(x)| < 2\lambda(V)\sqrt{\delta}$. Из леме 2.25 постоји слаба* околина Φ_2 (од ϕ_0 у $\mathcal{P}_1$) таква да је $|\chi_V * \phi(x) - \chi_V * \phi_0(x)| < \delta\lambda(V)$ за све $\phi \in \Phi_2$ и

$x \in K$. Тада означимо $\Phi = \Phi_1 \cap \Phi_2$. Онда је за све $\phi \in \Phi$ и $x \in K$

$$
\begin{aligned}
&|\phi(x) - \phi_0(x)| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda(V)}(|\lambda(V)\phi(x) - \chi_V * \phi(x)| + |\chi_V * (\phi - \phi_0)(x)| + |\chi_V * \phi_0(x) - \lambda(V)\phi_0(x)|) \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda(V)}(2\lambda(V)\sqrt{\delta} + \delta + 2\lambda(V)\sqrt{\delta}) = \delta + 4\sqrt{\delta}.
\end{aligned}
$$

Узмимо сада δ довољно мало, тако да је $\delta + 4\sqrt{\delta}$ мање од унапред задатог ε, одакле закључујемо и обратно тврђење, да слаба* конвергенција на $\mathcal{P}_1$ повлачи компактну конвергенцију на G. ■

Пре самог доказа Гељфанд-Рајковљеве теореме, покажимо један заостали резултат, који се и иначе често користи.

Став 2.29. Нека је S скуп свих линеарних комбинација функција из $C_c(G) \cap \mathcal{P}(G)$. Тада S садржи све функције облика $f * g$, где $f, g \in C_c(G)$, густ је у $L^p(G)(1 \leqslant p < \infty)$, у L^p норми и густ у $C_c(G)$ у $\sup -$норми.

Доказ: Из последице 2.15 знамо да S садржи све функције облика $f * \widetilde{f}$, $f \in C_c(G)$, где је $\widetilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. Приметимо да на $C_c(G) \times C_c(G)$ имамо дефинисан сесквилинеаран функционал $B(f, g) = f * \widetilde{g}$, па по поларизационом идентитету важи

$$B(f,g) = \frac{1}{4}\big(B(f+g, f+g) - B(f-g, f-g) + iB(f+ig, f+ig) - iB(f-ig, f-ig)\big).$$

Одатле S садржи све функције облика $B(f, g)$, $f, g \in C_c(G)$, па важи први део тврђења (узмимо $g = \widetilde{g}$). Други део тврђења сада лако следи из чињенице да постоји апроксимативна јединица у $C_c(G)$, и притом је $C_c(G)$ густ у $L^p(G)$. ■

И коначно, за крај овог поглавља следи теорема коју смо давно најавили као наш циљ, али је било потребно доказати доста тврђења које претходе њој самој.

Теорема 2.30. [Гељфанд[12]-Рајковљева теорема] Ако је G локално компактна група, тада несводљиве унитарне репрезентације на G раздвајају тачке, тј. ако су x и y две различите тачке из G, тада постоји несводљива репрезентација π таква да је $\pi(x) \neq \pi(y)$.

[12]Исраел Моисеевич Гелфанд (1913-2009), совјетски математичар

Доказ: Из Урисонове леме, можемо одабрати функцију $f_0 \in C_c(G)$ такву да је $f_0(x) \neq f_0(y)$. По претходном Ставу, можемо функцију f_0 униформно апроксимирати линеарним комбинацијама функција из $C_c(G) \cap \mathcal{P}(G)$. Стога, ако узмемо да је f линеарна комбинација функција из $C_c(G) \cap \mathcal{P}(G)$ таква да је у свакој тачки удаљена од f_0 за највише $|\frac{f_0(x)-f_0(y)}{2}|$, тада имамо да је $f(x) \neq f(y)$. Како сваки елемент из $\mathcal{P}$ можемо нормирати тако да буде у $\mathcal{P}_1$, тада је $f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i$, где $\lambda_i \in \mathbb{C}, f_i \in C_c(G) \cap \mathcal{P}_1$. Сада из теорема 2.23 и 2.28 следи да је конвексни омотач $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ густ у $\mathcal{P}_1$ у топологији компактне конвергенције. Како је скуп $\{x, y\}$ компактан, сваки f_i можемо униформно апроксимирати на скупу $\{x, y\}$ функцијом g_i која припада конвексном омотачу скупа $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$. Ако ставимо да је $g = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i$ и $|g_i(z) - f_i(z)| < \frac{\delta}{\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|}$ за све i и $z \in \{x, y\}$ добијамо да је $|g(z) - f(z)| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i||g_i(z) - f_i(z)| < \delta$. Ако сада узмемо да је $\delta < \frac{f(x)-f(y)}{2}$, добијамо да је $g(x) \neq g(y)$. Како је свака линеарна комбинација функција из конвексног омотача од $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ уједно и линеарна комбинација функција из $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$, имамо да је $g = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \phi_i$, где $\mu \in \mathbb{C}$ и $\phi_i \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$. Како је $g(x) \neq g(y)$, то је за бар један i, $\phi_i(x) \neq \phi_i(y)$. Тада је одговарајућа репрезентација π_{ϕ_i} из теореме 2.16 иредуцибилна по Теореми 2.21 и важи:

$$\langle \pi_{\phi_i}(x)\varepsilon, \varepsilon \rangle = \phi_i(x) \neq \phi_i(y) = \langle \pi_{\phi_i}(y)\varepsilon, \varepsilon \rangle,$$

па је коначно $\pi_{\phi_i}(x) \neq \pi_{\phi_i}(y)$, што је и требало показати. ■

Поглавље 3: Анализа на локално компактним Абеловим групама

Сада прелазимо на централно поглавље у раду. Циљ нам је да што боље опишемо Фуријеову трансформацију на локално компактним групама и покажемо неке значајне теореме попут Бохнерове, Планшарелове и Понтрјагинове теореме о дуалности. Кроз цело поглавље G ће нам означавати локално компактну Абелову групу. Како се ради о Абеловој групи, многе ствари ће бити простије, али ће наравно важити и општији резултати које смо добили у претходним поглављима. Напоменимо само неколико чињеница које важе у случају Абелових група: лева и десна транслација се поклапају, G је унимодуларна, конволуција је комутативна, итд.

3.1 Дуална група

Нека је G локално компактна Абелова група. Из последице 2.8 знамо да су све несводљиве репрезентације групе G једнодимензионалне. Тада ако уочимо неку репрезентацију π на $H_\pi = \mathbb{C}$, знамо да је $\pi(x)(z) = \xi(x)z$, за $z \in \mathbb{C}$, где је ξ непрекидни хомоморфизам из G у T (мултипликативна група комплексних бројева модула 1 са стандардном топологијом).

Дефиниција 3.1. Хомоморфизам $\xi : G \to \mathrm{T}$ назива се **карактер**. Скуп свих карактера на G означавамо са $\widehat{G}$.

Како је $\pi(x)(1) = \xi(x)$, то је $\xi(x) = \langle \pi(x)1, 1\rangle$. Из става 2.14 и чињенице да је $\xi(1) = 1$ добијамо да је $\widehat{G}$ садржан у $\mathcal{P}_1(G)$. Штавише, по теореми 2.21, $\widehat{G}$ је скуп крајњих тачака $\mathcal{P}_1(G)$. Карактер $\xi \in \widehat{G}$ дефинише једну недегенерисану *-репрезентацију $L^1(G)$ на $\mathbb{C}$:

$$\xi(f) = \int \xi(x) f(x) dx,$$

при чему смо поистоветили $B(\mathbb{C})$ са $\mathbb{C}$. Обратно, ако имамо неки $\Phi \in (L^1)^*$, њему одговара $\phi \in L^\infty$, тако да је $\Phi(g) = \int \phi(x)g(x)dx$, за $g \in L^1$. Тада је за све $f, g \in L^1$,

$$\begin{aligned}\Phi(f)\int \phi(x)g(x)dx = \Phi(f)\Phi(g) = \Phi(f * g) &= \iint \phi(y)f(yx^{-1})g(x)dxdy \\ &= \int \Phi(L_x f)g(x)dx.\end{aligned}$$

Одатле је $\Phi(f)\phi(x) = \Phi(L_x f)$ локално за скоро свако x. Узмимо $f \in L^1$ тако да је $\Phi(f) \neq 0$ (такав свакако постоји), па дефинишимо $\phi(x) = \frac{\Phi(L_x f)}{\Phi(f)}$ за свако x. Тада је ϕ непрекидна и када заменимо x са xy, а f са $L_y f$ у горњој једнакости, добијамо:

$$\phi(xy)\Phi(f) = \Phi(L_{xy}f) = \Phi(L_x L_y f) = \phi(x)\Phi(L_y f) = \phi(x)\phi(y)\Phi(f),$$

па је $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, а одатле $\phi(x^n) = \phi(x)^n$ за свако n, па пошто је ϕ ограничен, то је $|\phi(x)| = 1$, тј. $\phi : G \to \mathbb{T}$. Тиме смо показали да:

Теорема 3.1. *$\widehat{G}$ се идентификује са спектром алгебре $L^1(G)$ помоћу $\xi(f) = \int \xi(x)f(x)dx$.*

$\widehat{G}$ је очигледно Абелова група када множење дефинишемо тачка по тачка - неутрални елемент је константна функција 1, док је инверз:

$$\xi^{-1}(x) = \xi(x^{-1}) = \overline{\xi(x)}.$$

Топологију на $\widehat{G}$ уведимо као топологију компактне конвергенције на G. На основу теореме 2.28 ова топологија се поклапа са слабом* топологијом коју $\widehat{G}$ наслеђује као подскуп од L^∞. Како је $\widehat{G} \cup \{0\}$ скуп свих хомоморфизама из L^1 у $\mathbb{C}$, што је подскуп затворене јединичне лопте од L^∞ и очигледно слабо* затворен, па је слабо* компактан по Банах-Алгаоглуовој теореми. Дакле, закључујемо:

Став 3.2. *$\widehat{G}$ је локално компактна Абелова група, коју називамо* **дуална група** *од G.*

Сада ћемо се за тренутак усредсредити на компактне и дискретне групе G (које су онда и локално компактне). Ако је G компактна група, тада је $\widehat{G} \subset L^\infty(G) \subset L^p(G)$, за све $p \geqslant 1$, јер је Харова мера компактног скупа коначна.

Став 3.3. Ако је G компактна и ако је Харова мера таква да је мера скупа G једнака 1, тада је $\widehat{G}$ ортонормиран скуп у $L^2(G)$.

Доказ: Узмимо произвољно $\xi \in \widehat{G}$, тада је $|\xi|^2 \equiv 1$, па је $\|\xi\|_2 = 1$. За $\eta \neq \xi$, постоји $x_0 \in G$ тако да је $\xi(x_0) \neq \eta(x_0)$, тј. $\xi\eta^{-1}(x_0) \neq 1$. Тада је:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int \xi\overline{\eta} = \int \xi\eta^{-1}(x)dx = \int \xi\eta^{-1}(x_0x_0^{-1}x)dx =$$
$$= \xi\eta^{-1}(x_0)\int \xi\eta^{-1}(x_0^{-1}x)dx = \xi\eta^{-1}(x_0)\int \xi\eta^{-1}(x)dx = \xi\eta^{-1}(x_0)\int \xi\overline{\eta},$$

па је $\int \xi\overline{\eta} = 0$, чиме смо показали ортонормираност. ∎

Став 3.4. Ако је G дискретна, тада је $\widehat{G}$ компактна и обратно, ако је G компактна, тада је $\widehat{G}$ дискретна.

Доказ: Ако је G дискретна, тада $L^1(G)$ има јединицу (функцију која је једнака 0 свуда осим у 1). Тада је спектар алгебре $L^1(G)$ (који смо поистоветили са $\widehat{G}$) компактан.
Ако је G компактна, тада функција идентички једнака 1 припада $L^1(G)$, па је скуп $\{f \in L^\infty \mid |\int f| > \frac{1}{2}\}$ слабо* отворен. По Ставу 3.3 (наравно, можемо претпоставити да је мера скупа G једнака 1), $\int \xi = 1$, ако је $\xi \equiv 1$, а $\int \xi = 0$ иначе. Одатле је скуп $\{1\}$ отворен у $\widehat{G}$, па је и сваки једночлан скуп у $\widehat{G}$ отворен, а одатле је $\widehat{G}$ дискретна, што је и требало доказати. ∎

Сада ћемо се посветити рачунању дуалних група за неке основне локално компактне Абелове групе.

Теорема 3.5. (1) $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$, при чему је карактер облика $\xi(x) = e^{2\pi i\xi x}$.
(2) $\widehat{\mathrm{T}} \cong \mathbb{Z}$, при чему је карактер облика $n(\alpha) = \alpha^n$.
(3) $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathrm{T}$, при чему је карактер облика $\alpha(n) = \alpha^n$.
(4) $\widehat{\mathbb{Z}_k} \cong \mathbb{Z}_k$ ($\mathbb{Z}_k$ је адитивна група целих бројева по модулу k), при чему је $n(m) = e^{2\pi i\frac{mn}{k}}$.

Доказ: (1) Најпре, очигледно је да су функције облика $x \mapsto e^{2\pi i\xi x}$ елементи групе $\widehat{R}$. Обратно, узмимо $\xi \in \widehat{R}$. Тада је $\xi(0) = 1$, па постоји $t > 0$ тако да је $\int_0^t \xi dx \neq 0$. Онда је:

$$\xi(y)\int_0^t \xi(x)dx = \int_0^t \xi(x+y)dx = \int_y^{t+y} \xi(x)dx,$$

па је $\xi(y) = \frac{\int\limits_y^{t+y} \xi(x)dx}{\int\limits_0^t \xi(x)dx}$, па је ξ диференцијабилна и важи

$$\xi'(y) = \frac{\xi(y)(\xi(t) - 1)}{\int\limits_0^t \xi(x)dx} = C\xi(y),$$

где је C нека константа. Решење ове диференцијалне једначине при услову $\xi(0) = 1$ јесте $\xi(y) = e^{Cy}$, па како $|\xi(y)| = 1$ за све y, C мора бити имагинаран, тј. ξ је траженог облика.

(2) Како је $\mathrm{T} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ по идентификацији $\alpha = e^{2\pi ix} \in \mathrm{T}$, па су карактери на T управо карактери на $\mathbb{R}$ који су тривијални на $\mathbb{Z}$. Резултат онда одмах следи из (1).

(3) Ако $\phi \in \widehat{\mathbb{Z}}$, тада $\alpha = \phi(1) \in \mathrm{T}$ па је $\phi(n) = \phi(1)^n = \alpha^n$.

(4) Карактери на $\mathbb{Z}_k$ су карактери на $\mathbb{Z}$ који су тривијални на $k\mathbb{Z}$, тј. облика $\phi(n) = \alpha^n$, где је α $k-$ти корен из јединице. ■

Овај резултат врло лако може да се прошири на следећи начин.

Став 3.6. Ако су $G_1, \ldots, G_n$ локално компактне Абелове групе, тада је

$$(G_1 \widehat{\times \cdots \times} G_n) \cong \widehat{G_1} \times \cdots \times \widehat{G_n}.$$

Доказ: Узмимо произвољан $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \widehat{G_1} \times \cdots \times \widehat{G_n}$. Тада он дефинише карактер на $G_1 \times \cdots \times G_n$:

$$\xi(x_1, \ldots, x_n) = \xi_1(x_1) \cdots \xi_n(x_n).$$

Са друге стране, ако узмемо $\xi \in \widehat{\prod_{i=1}^n G_i}$, онда за $i = 1, 2, \ldots, n$ дефинишимо

$$\xi_i(x_i) := \xi(0, 0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0),$$

при чему је ξ_i очигледно карактер на G_i. Тада је

$$\begin{aligned}
\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \xi(\sum_{i=1}^n (0, 0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)) \\
&= \prod_{i=1}^n \xi(0, 0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \\
&= \xi_1(x_1)\xi_2(x_2) \cdots \xi_n(x_n),
\end{aligned}$$

одакле следи тражено. ■

Последица 3.7. $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n$, $\widehat{\mathrm{T}^n} \cong \mathbb{Z}^n$, $\widehat{\mathbb{Z}^n} \cong \mathrm{T}^n$ и $\widehat{G} \cong G$ важи за сваку коначну Абелову групу G.

3.2 Фуријеова трансформација

Сада ћемо увести централни појам хармонијске анализе - Фуријеову трансформацију. Карактеру $\xi \in \widehat{G}$ придружимо функционал $f \mapsto \overline{\xi}(f) = \int \overline{\xi(x)} f(x) dx$. Гељфандова трансформација на $L^1(G)$ тада постаје пресликавање из $L^1(G)$ у $C(\widehat{G})$ дефинисано са:

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int \overline{\xi(x)} f(x) dx.$$

Дефиниција 3.2. Пресликавање $\mathcal{F} : L^1(G) \to C(\widehat{G})$ које смо управо дефинисали, називамо **Фуријеовом трансформацијом**.

Став 3.8. Фуријеова трансформација је $*-$хомоморфизам Банахових $*-$алгебри $L^1(G)$ и $C_0(\widehat{G})$ (што је $C(\widehat{G})$ ако је $\widehat{G}$ компактан) норме мање од 1 ($\|\mathcal{F}\| \leqslant 1$). Слика $L^1(G)$ Фуријеовом трансформацијом је густ потпростор од $C_0(\widehat{G})$.

Доказ: Довољно је проверити да је слика алгебре $L^1(G)$ симетрична, тј. да ли из чињенице да важи $f = f^*$ следи да $\widehat{f}$ узима само реалне вредности. Дакле, знамо да је $f(x) = \overline{f(x^{-1})}$ за све $x \in G$, па је:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) = \int \overline{\xi(x)} f(x) dx = \int \xi(x^{-1}) f(x) dx = \int \xi(x) f(x^{-1}) dx \\ = \int \overline{f(x)} \xi(x) dx = \overline{\int \overline{\xi(x)} f(x) dx} = \overline{\widehat{f}(\xi)}.\end{aligned}$$

■

Сада срачунајмо два својства Фуријеове трансформације која ћемо често користити.

$$\widehat{L_y f}(\xi) = \int \overline{\xi(x)} f(y^{-1}x) dx = \int \overline{\xi(yx)} f(x) dx = \overline{\xi(y)} \widehat{f}(\xi), \quad y \in G,$$

где смо у другој једнакости користили смену $x \leftrightarrow yx$ и транслаторну инваријантност Харове мере.

$$\widehat{\eta f}(\xi) = \int \overline{\xi(x)} \eta(x) f(x) dx = \widehat{f}(\eta^{-1}\xi) = L_\eta \widehat{f}(\xi), \quad \eta \in \widehat{G}.$$

Фуријеова трансформација може се проширити на комплексне Радонове мере на G на следећи начин: ако је $\mu \in M(G)$ комплексна Радонова мера, њена Фуријеова трансформација је ограничена непрекидна функција $\widehat{\mu}$ на $\widehat{G}$ дефинисана као:

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int \overline{\xi(x)} d\mu(x).$$

Понекад се за овај вид Фуријеове трансформације користи назив Фурије-Стилтјесова трансформација, да би се оне разликовале. Како су ствари потпуно исте код ње, ми ћемо користити једноставнији термин - Фуријеова трансформација.

Најпре уочимо да је формула $\int \phi d(\mu * \nu) = \iint \phi(xy) d\mu(x) d\nu(y)$ тачна за све ограничене непрекидне ϕ. Прво, она је по дефиницији $\mu * \nu$ тачна за све $\phi \in C_0(G)$, па остаје тачна и за све ограничене непрекидне ϕ, јер μ и ν можемо апроксимирати у норми мерама са компактним носачем. Одатле можемо закључити да и даље вреди $\widehat{\mu * \nu} = \widehat{\mu}\widehat{\nu}$, јер важи следећи низ једнакости:

$$\widehat{\mu * \nu}(\xi) = \iint \overline{\xi(xy)} d\mu(x) d\nu(y) = \iint \overline{\xi(x)\xi(y)} d\mu(x) d\nu(y) = \overline{\mu}(\xi)\overline{\nu}(\xi).$$

Тада $\widehat{G}$ можемо схватити као део спектра Банахове алгебре $M(G)$, а $\widehat{\mu}$ као рестрикцију Гељфандове трансформације мере μ на $\widehat{G}$.

Наредна идеја је да сличну конструкцију спроведемо са мерама на $\widehat{G}$. Ако имамо неку комплексну меру $\mu \in M(\widehat{G})$, дефинишимо ограничену непрекидну функцију

$$\phi_\mu(x) = \int_{\widehat{G}} \xi(x) d\mu(\xi).$$

До сада нисмо писали по чему се врши интеграција, јер је то увек било по групи G. У наредном тексту ћемо често интегралити и по G и по $\widehat{G}$, али ћемо остати доследни досадашњој нотацији - биће увек јасно по чему се интеграли, па ту информацију нећемо писати.

Став 3.9. Пресликавање $\mu \mapsto \phi_\mu$ је ограничен линеарни инјективни оператор норме највише 1 из простора $M(\widehat{G})$ у простор непрекидних ограничених функција на G са униформном нормом.

Доказ: Очигледно је да је у питању ограничен оператор норме највише 1, док непрекидност следи из Арцела-Асколијеве теореме. Докажимо сада инјективност. Претпоставимо да је $\mu \in M(\widehat{G})$ такав да је $\phi_\mu \equiv 0$. Тада је за све $f \in L^1(G)$ важи:

$$0 = \int \phi_\mu(x) f(x) dx = \iint \xi(x) f(x) d\mu(\xi) dx = \int \widehat{f}(\xi^{-1}) d\mu(\xi),$$

па како је $\mathcal{F}(L^1)$ густ у $C_0(\widehat{G})$, то мора бити $\mu \equiv 0$. ■

Наредно тврђење је један од главних резултата ове теорије.

Теорема 3.10. [**Бохнерова**[13] **теорема**] Ако је $\phi \in \mathcal{P}(G)$, тада постоји јединствена позитивна мера $\mu \in M(\widehat{G})$ таква да је $\phi = \phi_\mu$.

Доказ: Због претходног става, довољно је доказати да је $\mu \mapsto \phi_\mu$ сурјекција на $\mathcal{P}(G)$. Нека је $\mu \in M(\widehat{G})$ позитивна мера. Тада је за све $f \in L^1(G)$

$$\iint f(x)\overline{f(y)}\phi_\mu(y^{-1}x) dx dy = \iiint f(x)\overline{f(y)\xi(y)}\xi(x) d\mu(\xi) dx dy = \int |\widehat{\overline{f}}|^2(\xi) d\mu(\xi) \geqslant 0,$$

па је ϕ_μ функција позитивног типа.
Узмимо сада $\phi \in \mathcal{P}(G)$. Због хомогености можемо претпоставити да је $\phi(1) \leqslant 1$, тј. да $\phi \in \mathcal{P}_0$. Нека је M_0 скуп позитивних мера $\mu \in M(\widehat{G})$ таквих да је $\mu(\widehat{G}) \leqslant 1$. Тада је M_0 компактан у слабој* топологији на $M(\widehat{G})$. Нека је $\{\mu_\alpha\}$ мрежа у M_0 која конвергира ка μ у овој топологији, тада за све $f \in L^1$ имамо да је

$$\begin{aligned}
\int f(x)\phi_{\mu_\alpha}(x) dx &= \iint f(x)\xi(x) d\mu_\alpha(\xi) dx \\
&= \int \widehat{f}(\xi^{-1}) d\mu_\alpha(\xi) \to \int \widehat{f}(\xi^{-1}) d\mu(\xi) \\
&= \iint f(x)\xi(x) d\mu(\xi) dx = \int f(x)\phi_\mu(x) dx.
\end{aligned}$$

Тиме смо добили да $\phi_{\mu_\alpha} \to \phi_\mu$ у слабој* топологији на $\mathcal{P}_0 \subset L^\infty$. Другим речима, показали смо да је пресликавање $\mu \to \phi_\mu$ непрекидно из M_0 у $\mathcal{P}_0$, па је његова слика компактан, конвексан подскуп $\mathcal{P}_0$. Узимајући да је μ мера сконцентрисана у произвољном карактеру ξ, добијамо да слика овог пресликвања садржи $\widehat{G}$. Слично, узимајући да је $\mu \equiv 0$, добијамо да слици припада и 0. Пошто су по Теореми 2.21 и Леми 2.22 ово крајње тачке $\mathcal{P}_0$, то из Крејн-Милманове теореме следи да је слика овог пресликавања читав скуп $\mathcal{P}_0$, чиме смо доказали тврђење. ■

[13]Salomon Bochner (1899–1982.), амерички математичар пољског порекла

Помоћу Бохнерове теореме можемо у потпуности описати изглед слике оператора $\mu \to \phi_\mu$ са доменом $M(\widehat{G})$, јер све елементе из тог скупа можемо представити као линеарну комбинацију позитивних, коначних Радонових мера на $\widehat{G}$. Сада можемо увести просторе са којима ћемо у наставку често баратати.

$$\mathcal{B}(G) = \{\phi_\mu | \mu \in M(\widehat{G})\} = \{\text{линеарне комбинације елемената из } \mathcal{P}(G)\};$$

$$\mathcal{B}^p(G) = \mathcal{B}(G) \cap L^p(G), p < \infty.$$

По Ставу 2.29 знамо да $\mathcal{B}(G)$ садржи све функције облика $f * g$, где су $f, g \in C_c(G)$ и да је $\mathcal{B}^p(G)$ густ у $L^p(G)$ за све $p < \infty$.
Уведимо ознаку $\phi \mapsto \mu_\phi$ за инверз пресликавања $\mu \mapsto \phi_\mu$. Тада за све $\phi \in \mathcal{B}(G)$ важи $\phi_{\mu_\phi} = \phi$ и за све $\mu \in M(\widehat{G})$ је $\mu_{\phi_\mu} = \mu$.
Наредни циљ нам је да објаснимо Фуријеову формулу инверзије за функције из $\mathcal{B}^1$. Докажимо најпре једну техничку лему:

Лема 3.11. Ако је $K \subset \widehat{G}$ компактан, тада постоји $f \in C_c(G) \cap \mathcal{P}$ таква да је $\widehat{f} \geqslant 0$ на $\widehat{G}$ и $\widehat{f} > 0$ на K.

Доказ: Узмимо $h \in C_c(G)$ такво да је $\widehat{h}(1) = \int h = 1$ и нека је $g = h^* * h$. Тада је $\widehat{g} = |\widehat{h}|^2$ и $\widehat{g} \geqslant 0$ и $\widehat{g}(1) = 1$, па постоји околина $V \ni 1$ у $\widehat{G}$ таква да је $\widehat{g} > 0$ на V. Како је K компактан, можемо га покрити са коначно много транслата од V, рецимо $K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} \xi_j V_j$. Нека је $f = (\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j)g$. Тада из показаних својстава Фуријеове трансформације имамо да је $\widehat{f}(\xi) = \sum\limits_{j=1}^{n} \widehat{g}(\xi_j^{-1}\xi)$, па је $\widehat{f} > 0$ на K и $\widehat{f} \geqslant 0$ на $\widehat{G}$. По Последици 2.15 знамо да $g \in \mathcal{P}$, па следи да и $f \in \mathcal{P}$ (очигледно је да $f \in C_c(G)$). Наиме, за све $\phi \in L^1(G)$, $\xi \in \widehat{G}$ и $x \in G$ важи

$$\begin{aligned}\xi(x)(\phi * \phi^*)(x) &= \int \xi(x)\phi(y)\overline{\phi(yx^{-1})}dy \\ &= \int \xi(y)\phi(y)\overline{\xi(yx^{-1})\phi(yx^{-1})}dy = ((\xi\phi) * (\xi\phi)^*)(x),\end{aligned}$$

па је

$$\int f(\phi * \phi^*) = \int \sum_{j=1}^{n} \xi_j g(\phi * \phi^*) = \sum_{j=1}^{n} \int g((\xi_i\phi) * (\xi_i\phi)^*) \geqslant 0.$$

■

Наредна лема, иако једноставна, биће нам доста значајна:

Лема 3.12. Ако су $f, g \in \mathcal{B}^1$, тада је $\widehat{f} d\mu_g = \widehat{g} d\mu_f$.

Доказ: Видимо да су обе мере $\widehat{f} d\mu_g$ и $\widehat{g} d\mu_f$ из $M(\widehat{G}) \cong C_0(\widehat{G})^*$. Следи да је за њихове једнакост, из чињенице да је $\mathcal{F}(L^1(G))$ густ у $C_0(\widehat{G})$, довољно показати да су њихови интеграли једнаки у односу на функције $\widehat{h}$, $h \in L^1(G)$. Узмимо произвољно $h \in L^1(G)$, тада имамо

$$\int \widehat{h} d\mu_f = \iint \xi(x^{-1}) h(x) dx d\mu_f(\xi) = \int h(x) f(x^{-1}) dx = h * f(1).$$

Заменимо сада h са $h * g$ и f са g у овом изразу, па закључујемо:

$$\int \widehat{h}\widehat{g} d\mu_f = (h * g) * f(1) = (h * f) * g(1) = \int \widehat{h}\widehat{f} d\mu_g.$$

Одатле директно следи тражено $\widehat{f} d\mu_g = \widehat{g} d\mu_f$. ■

Теорема 3.13. **[Прва Фуријеова формула инверзије]** Ако је $f \in \mathcal{B}^1$, тада је $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$. За сваку Харову меру dx на G, можемо изабрати Харову меру $d\xi$ на $\widehat{G}$ такву да важи $d\mu_f(\xi) = \widehat{f}(\xi) d\xi$. Посебно,

$$f(x) = \int \xi(x) \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Доказ: Тражену меру $d\xi$ ћемо добити тако што ћемо констуисати припадни позитивни линеарни функционал на $C_c(\widehat{G})$. За $\psi \in C_c(\widehat{G})$, по Леми 3.11 постоји $f \in L^1(G) \cap \mathcal{P}(G)$, такав да је $\widehat{f} > 0$ на $\operatorname{supp} \psi$. Дефинишимо сада тражени функционал I као:

$$I(\psi) = \int\limits_{\operatorname{supp} \psi} \frac{\psi}{\widehat{f}} d\mu_f.$$

Ако узмемо било коју другу функцију g која задовољава услове као и f, на основу леме 3.12 имамо

$$\int \frac{\psi}{\widehat{f}} d\mu_f = \int \frac{\psi}{\widehat{f}\widehat{g}} \widehat{g} d\mu_f = \int \frac{\psi}{\widehat{f}\widehat{g}} \widehat{f} d\mu_g = \int \frac{\psi}{\widehat{g}} d\mu_g,$$

чиме смо показали да I зависи само од ψ, а не од избора функције f. Ако узмемо $\phi, \psi \in C_c(\widehat{G})$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, затим нађемо функцију $\widehat{f}$ која је строго позитивна на унији компактних скупова $\operatorname{supp} \phi$, $\operatorname{supp} \psi$ и $\operatorname{supp} (\alpha\phi + \beta\psi)$, тада линеарност функционала I лако следи, када применимо управо $\widehat{f}$ у дефиницији I. Такође, јасно је да је $I(\psi) \geqslant 0$ када је $\psi \geqslant 0$, јер из

Бохнерове теореме знамо да је $\mu_f \geqslant 0$, јер $f \in \mathcal{P}(G)$. Одатле знамо да је I позитиван линеаран функционал на простору $C_c(\widehat{G})$.
Сада ћемо доказати да је I нетривијалан и да је инваријантан у односу на транслације. Узмимо произвољан $g \in \mathcal{B}^1$, тада из леме 3.12 имамо:

$$I(\widehat{g}\psi) = \int \frac{\psi}{\widehat{f}}\widehat{g}d\mu_f = \int \frac{\psi}{\widehat{f}}\widehat{f}d\mu_g = \int \psi d\mu_g,$$

па због инјективности пресликавања $g \mapsto \mu_g$, можемо изабрати g и $\psi \in C_c(\widehat{G})$, такве да је $\int \psi d\mu_g \neq 0$, па је $I \neq 0$.
Да бисмо показали транслаторну инваријантност, приметимо најпре да за $\eta \in \widehat{G}$ и $f \in C_c(G) \cap \mathcal{P}(G)$ важи

$$\int \xi(x)d\mu_f(\eta\xi) = \int \eta^{-1}\xi(x)d\mu_f(\xi) = \overline{\eta(x)}f(x) = (\overline{\eta}f)(x),$$

па по бијективности коресподенције $f \mapsto \mu_f$ закључујемо да је $d\mu_f(\eta\xi) = d\mu_{\overline{\eta}f}\xi$. Приметимо да је, према доказу леме 3.11, $\overline{\eta}f$ позитивног типа (аналогно као у том доказу за g и f, овде знамо да је f позитивног типа, а $\overline{\eta} \in \widehat{G}$). Знамо да важи и $\widehat{\overline{\eta}f}(\xi) = \widehat{f}(\eta\xi)$, па ако узмемо f, такво да је $\widehat{f} \geqslant 0$ додатно на $\operatorname{supp}\psi \cup \operatorname{supp} L_\eta\psi$,

$$\begin{aligned} I(L_\eta\psi) &= \int\limits_{\operatorname{supp}\ L_\eta\psi} \frac{\psi(\eta^{-1}\xi)}{\widehat{f}(\xi)}d\mu_f(\xi) = \int\limits_{\operatorname{supp}\ \psi} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{f}(\eta\xi)}d\mu_f(\eta\xi) \\ &= \int\limits_{\operatorname{supp}\ \psi} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{\overline{\eta}f}(\xi)}d\mu_{\overline{\eta}f}(\xi) = I(\psi), \end{aligned}$$

где друга једнакост следи сменом $\xi = \eta\xi$, а последња из већ показане независности функционала I од f. Тиме смо показали да је I транслаторно инваријантан. Одатле следи да је функционал I задат интеграцијом у односу на неку Харову меру $d\xi$ на $\widehat{G}$, тј. $I(\psi) = \int \psi(\xi)d\xi$. Раније у доказу смо показали да за $f \in \mathcal{B}^1(G)$ и $\psi \in C_c(\widehat{G})$ важи

$$\int \psi(\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi = I(\psi\widehat{f}) = \int \psi d\mu_f,$$

па закључујемо да је $\widehat{f}(\xi)d\xi = d\mu_f(\xi)$. Одатле и из чињенице да је $d\mu_f$ комплексна, па самим тим и коначна мера, важи да $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$ и $f(x) = \int \xi(x)\widehat{f}(\xi)d\xi$. ∎

Напоменимо да ћемо у следећој тачки показати да Фуријеова

формула инверзије остаје тачна ако услов $f \in \mathcal{B}^1(G)$ заменимо са $f \in L^1(G)$ и $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$.
Сада наведимо једну последицу која следи директно из Бохнерове теореме и Фуријеове формуле инверзије.

Последица 3.14. Ако $f \in L^1(G) \cap \mathcal{P}(G)$, тада је $\widehat{f} \geqslant 0$.

Доказ: Из Фуријеове формуле инверзије имамо да је $\widehat{f}(\xi)d\xi = d\mu_f(\xi)$, а из Бохнерове теореме знамо да је $\mu_f \geqslant 0$, па директно следи да је $\widehat{f} \geqslant 0$. ■

Дефиниција 3.3. Харову меру $d\xi$ на $\widehat{G}$ која задовољава Фуријеову формулу инверзије, тј. за коју је $d\mu_f = \widehat{f}d\xi$, за све $f \in \mathcal{B}^1(G)$ зовемо **дуална мера** Харове мере dx на G.

Пример 3.15. Као што већ знамо, уз идентификацију $\langle x, \xi \rangle = e^{2\pi i x\xi}$, $x \in \mathbb{R}$, $\xi \in \widehat{\mathbb{R}}$, важи $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$. У том случају, Лебегова мера је сама себи дуална и за сваку функцију $f \in L^1(\mathbb{R})$, такву да $\widehat{f} \in L^1(\widehat{\mathbb{R}})$ важе формуле

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} f(x)dx \quad , \quad f(x) = \int_{\widehat{\mathbb{R}}} e^{2\pi i x\xi} \widehat{f}(\xi)d\xi,$$

где су dx и $d\xi$ Лебегове мере на $\mathbb{R}$, односно $\widehat{\mathbb{R}}$.

Доказ: Да бисмо показали да је Лебегова мера сама себи дуална, довољно је проверити да ли важи Фуријеова формула инверзије за неку конкретну функцију. Очекивано, посматрајмо $g(x) = e^{-\pi x^2}$. Тада је $\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi - \pi x^2}dx$. Налажењем извода $\widehat{g}(\xi)$ (прескочићемо детаље зашто можемо извршити само деривацију израза под кореном) добијамо

$$(\widehat{g}(\xi))' = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x e^{-2\pi i x\xi} e^{-\pi x^2}dx.$$

Одатле, парцијалном интеграцијом, при чему је $u = e^{-2\pi i x\xi}$, а $dv = \int x e^{-\pi x^2}dx$, добијамо

$$(\widehat{g}(\xi))' = -2\pi\xi.$$

Решавањем ове диференцијалне једначине, закључујемо да је $\widehat{g}(\xi) = c \cdot e^{-\pi\xi^2}$, што уз услов $\widehat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}dx = 1$, коначно даје $c = 1$, тј. $\widehat{g} = g$. Сада из парности функције g, следи $g(x) = \int_{\widehat{\mathbb{R}}} e^{2\pi i x\xi - \pi\xi^2}d\xi$, за све $x \in \mathbb{R}$, што нам је и био циљ. ■

Опет имамо, сада већ логичан, општи резултат:

Став 3.16. Нека је G компактна група и Харова мера dx на њој таква да је мера G једнака 1. Тада је дуална мера $d\xi$ на $\widehat{G}$ бројачка. Важи и обратно: нека је G дискретна и Харова мера dx на њој бројачка. Тада је дуална мера $d\xi$ на $\widehat{G}$ таква да је мера $\widehat{G}$ једнака 1.

Доказ: Нека је G компактна. Тада за карактеристичну функцију $\chi_G \equiv 1$ и $\xi \in \widehat{G}$ важи $\widehat{\chi_G}(\xi) = \int \overline{\xi(x)} dx = \langle 1, \xi \rangle_{L^2(G)}$, па по Ставу 3.3 важи да је $\widehat{\chi_G} = \chi_{\{1\}}$. Како је $\chi_G * \chi_G^* = \chi_G$, $\chi_G \in \mathcal{P}(G)$, можемо да применимо формулу Фуријеове инверзије за $x \in G$:

$$1 = \chi_G(x) = \sum_{\xi \in \widehat{G}} \xi(x) \chi_{\{1\}}(\xi) d\xi,$$

па $d\xi$ јесте бројачка мера.
Претпоставимо сада да је G дискретна и dx бројачка мера. Приметимо да је тада

$$\widehat{\chi_{\{1\}}}(\xi) = \int \overline{\xi(x)} \chi_{\{1\}} dx = \overline{\xi(1)} = 1,$$

па како је $\chi_{\{1\}}$ позитивног типа због $\chi_{\{1\}} * \chi_{\{1\}}^* = \chi_{\{1\}}$, по Фуријеовој формули инверзије добијамо $\chi_{\{1\}}(x) = \int \xi(x) d\xi$. Уврстимо сада $x = 1$ и добијамо да је мера $\widehat{G}$ једнака 1, што смо и хтели да докажемо. ■

Сада смо дошли до централне теореме у L^2 теорији Фуријеових трансформација:

Теорема 3.17. [**Планшарелова**[14] **теорема**] Фуријеова трансформација је добро дефинисана на $L^1(G) \cap L^2(G)$ и може се јединствено проширити до унитарног изоморфизма из $L^2(G)$ у $L^2(\widehat{G})$.

Доказ: Нека је $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Тада је $f * f^* \in L^1(G) \cap \mathcal{P}(G)$ по последици 2.15, па по Фуријеовој формули инверзије и чињеници да је $\widehat{f * f^*} = |\widehat{f}|^2$ имамо

$$\int |f(x)|^2 dx = f * f^*(1) = \int \overline{\xi(1)} \widehat{f * f^*}(\xi) d\xi = \int |\widehat{f}|^2 d\xi.$$

Одатле закључујемо да је $\widehat{f} \in L^2(\widehat{G})$ и да је пресликавање $\mathcal{F} : L^1(G) \cap L^2(G) \to L^2(\widehat{G})$, гледајући на оба простора L^2 норме, изометрија. Како је $L^1(G) \cap L^2(G)$ густ у $L^2(G)$ јер садржи $C_c(G)$, $\mathcal{F}$ можемо проширити до изометрије $L^2(G) \to L^2(\widehat{G})$, па преостаје да докажемо сурјективност.

[14] Michel Plancherel (1885-1967), швајцарски математичар

Претпоставимо да је $\phi \in L^2(\widehat{G})$ ортогоналан на све $\widehat{f}$, где $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Тада је по својствима Фуријеове трансформације

$$0 = \int \phi \overline{\widehat{L_x f}} = \int \overline{\xi(x)} \phi(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)} d\xi.$$

Како $\phi, \widehat{f} \in L^2(\widehat{G})$, то $\phi \overline{\widehat{f}} \in L^1(\widehat{G})$, па $\phi(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)} d\xi \in M(\widehat{G})$, што означимо са ν. Тада имамо релацију $0 = \int \xi(x) d\nu(\xi)$ за све $x \in G$, тј. $\phi_\nu \equiv 0$. Но, како је $\mu \mapsto \phi_\mu$ бијекција $M(\widehat{G}) \to \mathcal{B}(G)$, то је ν тривијална мера, па $\phi \equiv 0$, што смо и хтели да докажемо. ■

Следи једна лака последица која употпуњује став о ком је већ било речи.

Последица 3.18. Ако је G компактан и мера на G таква да је мера скупа G једнака 1, тада је $\widehat{G}$ ортонормирана база.

Доказ: До сада знамо да је $\widehat{G}$ ортонормиран скуп. Ако је $f \in L^2$ ортогоналан на све $\xi \in \widehat{G}$, тада је $0 = \int f \overline{\xi} = \widehat{f}(\xi)$ за све ξ, па је $f = 0$ из Планшарелове теореме. ■

Фуријеова трансформација је сада дефинисана на $L^1(G) + L^2(G)$. Ако је $p \in [1, 2]$, тада је $L^p \subset L^1 + L^2$, па можемо дефинисати $\widehat{f}$ за $f \in L^p(G)$ и важи следећа битна теорема којом завршавамо одељак:

Теорема 3.19. [Хауздорф-Јангова неједнакост] Нека су $p \in [1, 2]$ и $q \in [2, +\infty]$ такви да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тада за $f \in L^p(G)$, вреди $\widehat{f} \in L^q(\widehat{G})$ и $\|\widehat{f}\|_q \leqslant \|f\|_p$.

Доказ: Доказ следи директно из Рис-Торинове теореме, знајући да је $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ и $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ из Планшарелове теореме. ■

3.3 Понтрјагинова теорема о дуалности

До сада смо у претходном одељку имали резултате само у једном смеру. Нпр. компактност, односно дискретност групе G повлачи дискретност, односно компактност дуалне групе $\widehat{G}$, али то још увек не значи да важи обрат. У том смислу, употпунићемо резултате претходног одељка кључним резултатом - Понтрјагиновом теоремом о дуалности, која сама по себи представља вероватно и најбитнији резултат првог дела рада.

До сада смо посматрали елементе $\widehat{G}$ као карактере на G. Аналогно, можемо посматрати карактере на $\widehat{G}$. Прецизније, сваки $x \in G$ дефинише карактер $\Phi(x)$ на $\widehat{G}$ са $\Phi(x)(\xi) = \xi(x)$. Φ је очигледно пресликавање из G у $\widehat{\widehat{G}}$. Циљ нам је да покажемо да је у ствари то изоморфизам тополошких група.

За почетак ћемо показати пар потребних техничких чињеница.

Лема 3.20. Ако $\phi, \psi \in C_c(\widehat{G})$, тада је $\phi * \psi = \widehat{h}$, где $h \in \mathcal{B}^1(G)$. Одатле је $\mathcal{F}(\mathcal{B}^1(G))$ густ у $L^p(\widehat{G})$ за све $p \in [1, \infty)$.

Доказ: Дефинишимо функције $f(x) = \int \xi(x)\phi(\xi)d\xi$, $g(x) = \int \xi(x)\psi(\xi)d\xi$ и $h(x) = \int \xi(x)(\phi * \psi)(\xi)d\xi$. Онда $f, g, h \in \mathcal{B}(G)$, јер $\phi, \psi, \phi * \psi \in L^1(\widehat{G})$. Тада $\int f\overline{k}$ и $\int g\overline{k}$ имају смисла за свако $k \in L^1(G) \cap L^2(G)$, па по Коши-Шварцовој неједнакости и Планшареловој теореми важи:

$$\left| \int f\overline{k} \right| = \left| \iint \xi(x)\phi(\xi)\overline{k(x)}d\xi dx \right| = \left| \int \phi\overline{\widehat{k}} \right| \leqslant \|\phi\|_2\|\widehat{k}\|_2 = \|\phi\|_2\|k\|_2,$$

па применом обрата Хелдерове неједнакости, закључујемо да f и аналогно g припадају $L^2(G)$. Сада покажимо да је h тражена функција.

$$h(x) = \iint \xi(x)\phi(\xi\eta^{-1})\psi(\eta)d\eta d\xi = \iint \xi\eta(x)\phi(\xi)\psi(\eta)d\xi d\eta = f(x)g(x),$$

па $h \in L^1(G)$. Пошто по дефиницији $h \in \mathcal{B}(G)$, то $h \in \mathcal{B}^1(G)$, па из Фуријеове формуле инверзије, $h(x) = \int \xi(x)\widehat{h}(\xi)d\xi$. Но, тада из бијективности пресликавања $\mu \mapsto \phi_\mu$, следи $\widehat{h} = \phi * \psi$. Што се тиче другог дела леме, по Фуријеовој формули инверзије, $\mathcal{F}(\mathcal{B}^1(G))$ је садржан у $L^1(\widehat{G})$, а знамо да је и у $L^\infty(\widehat{G})$. Одатле је садржан и у свим $L^p(\widehat{G}), p \in [1, \infty]$. Чињеница да је $\mathcal{F}(\mathcal{B}^1(G))$ густ у $L^p(\widehat{G})$ доказује се на стандардан и већ виђен начин (погледати Став 2.29). ■

Следи једна тополошка лема, коју ћемо користити у Понтрјагиновој теореми о дуалности која следи одмах после ње.

Лема 3.21. Нека је G локално компактна група и H њена подгрупа. Ако је H локално компактна у релативној топологији, тада је H затворена.

Доказ: Како је H локално компактна у релативној топологији, то постоји отворена околина $U \ni 1$ у G таква да је затворење скупа $U \cap H$ у H, које ћемо означити са K, компактан скуп у H. Али онда је K компактан, а тиме и затворен у G, па је K затворење и у G скупа $U \cap H$. Узмимо сада прозивољно $x \in \overline{H}$. Тада постоји мрежа $\{x_\alpha\}$ у H која конвергира ка x. Изаберимо симетричну околину $V \ni 1$ у G тако да $VV \subset U$. Како је $\overline{H}$ подгрупа, то $x^{-1} \in \overline{H}$, па је $Vx^{-1} \cap H \neq \varnothing$. Узмимо онда $y \in Vx^{-1} \cap H$. Можемо одабрати x_α тако да припада xV, па $yx_\alpha \in (Vx^{-1})(xV) = VV \subset U$. Штавише, $yx_\alpha \in H$, јер оба припадају H, а како $yx_\alpha \to yx$, то $yx \in K \subset H$. Али онда коначно $x = y^{-1}(yx) \in H$, па је H затворен. ■

Теорема 3.22. **[Понтрјагинова[15] теорема дуалности]** Пресликавање $\Phi : G \to \widehat{\widehat{G}}$ дефинисано са

$$\Phi(x)(\xi) = \xi(x), \xi \in \widehat{G},$$

је изоморфизам тополошких група.

Доказ: Како је топологија на $\widehat{G}$ топологија компактне конвергенције, то конвергенција у њој повлачи и конвергенцију по тачкама, па је $\Phi(x)$ непрекидна за све $x \in G$. Ако су $\xi, \eta \in \widehat{G}$, тада је

$$\Phi(x)(\xi\eta) = (\xi\eta)(x) = \xi(x)\eta(x) = \Phi(x)(\xi)\Phi(x)(\eta),$$

па је $\Phi(x)$ хомоморфизам група $\widehat{G}$ и $\mathbb{T}$. Остало је дакле да се покаже да је Φ бијективан хомоморфизам група који је уједно и хомеоморфизам. Приметимо и да за све $x, y \in G$ и $\xi \in \widehat{G}$ важи

$$\Phi(xy)(\xi) = \xi(xy) = \xi(x)\xi(y) = \Phi(x)(\xi)\Phi(y)(\xi),$$

па је Φ хомоморфизам група G и $\widehat{\widehat{G}}$. Докажимо сада инјективност. Узмимо $x, y \in G$ тако да је $\Phi(x)(\xi) = \Phi(y)(\xi)$ за све $\xi \in \widehat{G}$. Тада је $\xi(x) = \xi(y)$ за све $\xi \in \widehat{G}$, па је $x = y$, јер карактери раздвајају тачке на G по Гељфанд-Рајковљевој теореми, чиме смо показали инјективност.

Да бисмо показали да је Φ хомеоморфизам на своју слику, довољно је да докажемо да су следећа четири услова еквивалентна за произвољну мрежу x_α у G:

(1) $x_\alpha \to x$;

(2) $f(x_\alpha) \to f(x)$, за све $f \in \mathcal{B}^1(G)$;

(3) $\int \xi(x_\alpha)\widehat{f}(\xi)d\xi \to \int \xi(x)\widehat{f}(\xi)d\xi$, за све $f \in \mathcal{B}^1(G)$;

(4) $\Phi(x_\alpha) \to \Phi(x)$ у $\widehat{\widehat{G}}$.

(1) $\Rightarrow$ (2) следи тривијално по непрекидности функције $f \in \mathcal{B}^1(G)$. Обратно, претпоставимо да $x_\alpha \nrightarrow x$. Онда постоји отворена околина

[15] Лев Семьонович Понтрягин (1908-1988), совјетски математичар

$U \ni x$ и подмрежа $x_\beta \notin U$. Из става 2.29, можемо узети непрекидну функцију $f \in \mathcal{B}^1(G)$ такву да је $f(x) \neq 0$ и supp$f \subset U$. Како је онда $f(x_\beta) = 0$, то $f(x_\beta) \nrightarrow f(x)$, па смо доказали (2) $\Rightarrow$ (1). (2) $\Leftrightarrow$ (3) важи директно из Фуријеове формуле инверзије. Приметимо сада да је (3) $\int \Phi(x_\alpha)\widehat{f} \to \int \Phi(x)\widehat{f}$ за све $f \in \mathcal{B}^1(G)$. Како на $\Phi(x)$ и $\Phi(x_\alpha)$ можемо гледати као на елементе $L^\infty(\widehat{G})^*$, а по Леми 3.20 $\mathcal{F}(\mathcal{B}^1(G))$ је густ у $L^1(\widehat{G})$, то следи еквиваленција (3) и (4) и да је Φ хомеоморфизам.
Преостаје још да покажемо сурјективност. Сада знамо и да је $\Phi(G)$ локално компактан, па је по Леми 3.21 затворен у $\widehat{\widehat{G}}$. Претпоставимо да постоји $x \in \widehat{\widehat{G}} \backslash \Phi(G)$. Изаберимо онда симетричну околину $V \ni 1$ у $\widehat{\widehat{G}}$ такву да је $xVV \cap \Phi(G) = \varnothing$ и изаберимо ненегативне, ненула $\phi, \psi \in C_c(\widehat{\widehat{G}})$ при чему је $\operatorname{supp}\phi \subset xV$ и $\operatorname{supp}\psi \subset V$. Онда је $\phi * \psi$ ненегативан и различит од нула, $\operatorname{supp}(\phi * \psi) \cap \Phi(G) = \varnothing$, па је по Леми 3.20 $\phi * \psi = \widehat{h}$, где је $h \in \mathcal{B}^1(\widehat{G})$. Тада је

$$0 = \widehat{h}(\Phi(y^{-1})) = \int \Phi(y)(\xi)h(\xi)d\xi = \int \xi(y)h(\xi)d\xi,$$

за све $y \in G$, па по Бохнеровој теореми следи да је $h = 0$. То је контрадикција са $\phi * \psi = \widehat{h} \neq 0$. Коначно, онда имамо да је $\Phi(G) \cong \widehat{\widehat{G}}$. ■

Према Понтрјагиновој теореми о дуалности, можемо идентификовати $\widehat{\widehat{G}}$ са G и писати $\xi(x) = x(\xi)$.
Сада можемо доказати већ најављену другу верзију Фуријеове формуле инверзије.

Теорема 3.23. **[Друга Фуријеова формула инверзије]** Нека је $f \in L^1(G)$ и $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$. Тада за скоро све $x \in G$ важи $f(x) = \widehat{\widehat{f}}(x^{-1})$. Ако је f непрекидна, тада $f(x) = \widehat{\widehat{f}}(x^{-1})$ важи за све $x \in G$.

Доказ: Како је

$$\widehat{f}(\xi) = \int \overline{\xi(x)}f(x)dx = \int \xi(x^{-1})f(x)dx = \int \xi(x)f(x^{-1})dx = \int x(\xi)f(x^{-1})dx,$$

онда је $\widehat{f} \in \mathcal{B}^1(\widehat{G})$ и уз ознаке из Бохнерове теореме, важи $d\mu_{\widehat{f}}(x) = f(x^{-1})dx$. Из прве Фуријеове формуле инверзије имамо $f(x^{-1})dx = \widehat{\widehat{f}}(x)dx$, тј. $f(x^{-1}) = \widehat{\widehat{f}}(x)$ за скоро све $x \in G$. $\widehat{\widehat{f}}$ је непрекидна за све $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$, па ако је додатно и f непрекидна, тада је једнакост тачна за све $x \in G$. ■

Последица 3.24. **[Теорема Фуријеове јединствености]** Ако су $\mu, \nu \in M(G)$ и $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$, тада је $\mu = \nu$. Посебно, ако су $f, g \in L^1(G)$ и $\widehat{f} = \widehat{g}$ тада је $f = g$.

Доказ: Уз ознаке из Бохнерове теореме, уз замену места G и $\widehat{G}$, добијамо да за све $\xi \in \widehat{G}$ важи $\phi_\mu(\xi) = \int x(\xi) d\mu(x)$ и $\phi_\nu(\xi) = \int x(\xi) d\nu(x)$, па је $\phi_\mu(\xi^{-1}) = \widehat{\mu}(\xi) = \widehat{\nu}(\xi) = \phi_\nu(\xi^{-1})$. По бијективности из Бохнерове теореме, одмах следи $\mu = \nu$. ■

Последица 3.25. $M(G)$ и $L^1(G)$ су полупросте Банахове алгебре.

Сада долазимо до већ најављеног обрата теореме из претходних одељака.

Став 3.26. Ако је $\widehat{G}$ компактна, онда је G дискретна. Ако је $\widehat{G}$ дискретна, онда је G компактна.

Доказ: Ово је сада врло једноставна последица закључака из става 3.4 и Понтрјагинове теореме о дуалности. ■

Став 3.27. Ако $f, g \in L^2(G)$ тада важи $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

Доказ: Изведимо доказ поступно. Најпре претпоставимо да $f, g \in L^2(G) \cap \mathcal{F}(\mathcal{B}^1(G))$. Тада је $f(x) = \widehat{\phi}(x^{-1})$ и $g(x) = \widehat{\psi}(x^{-1})$, при чему $\phi, \psi \in L^2(\widehat{G}) \cap \mathcal{B}^1(\widehat{G})$. Слично као у Леми 3.20

$$\widehat{\phi * \psi}(x^{-1}) = \iint \xi(x)\phi(\xi\eta^{-1})\psi(\eta) d\eta d\xi = f(x)g(x).$$

Примењујући прву Фуријеову формулу инверзије, имамо да је $\phi = \widehat{f}$ и $\psi = \widehat{g}$. Штавише, $\phi * \psi \in L^1 * L^1 \subset L^1$ и $fg \in L^2 \cdot L^2 \subset L^1$, па примењујући другу Фуријеову формулу инверзије добијамо

$$\widehat{f} * \widehat{g}(\xi) = \phi * \psi(\xi) = \widehat{\widehat{\phi * \psi}}(\xi^{-1}) = \widehat{fg}(\xi).$$

Дакле, доказали смо формулу за нешто мању класу функција, сада треба да склонимо услов $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{B}^1(G))$. У том циљу, за произвољне $f, g \in L^2(G)$, по леми 3.20 постоје низови $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ у $L^2(\widehat{G}) \cap \mathcal{B}^1(\widehat{G})$ који конвергирају ка f и g у L^2. Тада из Коши-Шварцове неједнакости $f_n g_n \to fg$ у $L^1(G)$, па $\widehat{f_n g_n} \to \widehat{fg}$ униформно. Тада је по Планшареловој теореми $\widehat{f}_n \to \widehat{f}$ и

$\widehat{g_n} \to \widehat{g}$ у $L^2(G)$, па за све $\xi \in \widehat{G}$ по Коши-Шварцовој неједнакости важи

$$\begin{aligned}\left|\int(\widehat{f_n}(\xi\eta^{-1}))\widehat{g_n}(\eta) - \widehat{f}(\xi\eta^{-1})\widehat{g}(\eta))d\eta\right| &\leqslant \int|\widehat{f_n}(\xi\eta^{-1}))\widehat{g_n}(\eta) - \widehat{f}(\xi\eta^{-1})\widehat{g}(\eta)|d\eta \\ &\leqslant \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_2\|\widehat{g_n}\|_2 + \|\widehat{f}\|_2\|\widehat{g_n} - \widehat{g}\|_2,\end{aligned}$$

па $\widehat{f}_n * \widehat{g_n} \to \widehat{f} * \widehat{g}$ униформно, одакле следи тврђење задатка. ■

Нови циљ коме тежимо јесте да покажемо дуалност између затворених подгрупа и количничких група групе G. За затворену подгрупу H од G дефинишимо

$$H^\perp = \{\xi \in \widehat{G} | \xi(x) = 1, \text{за све } x \in H\}.$$

Очигледно је $H^\perp$ затворена подгрупа групе $\widehat{G}$.

Став 3.28. За сваку затворену подгрупу H од G важи $(H^\perp)^\perp = H$.

Доказ: Нека је $x \in H$. Тада је за сваки $\xi \in H^\perp$, $\xi(x) = x(\xi) = 1$, тј. $x \in (H^\perp)^\perp$. Обратно, ако са π означимо количничко пресликавање са G у G/H и претпоставимо супротно, да постоји $x \in (H^\perp)^\perp \backslash H$. По Гељфанд-Рајковљевој теореми постоји $\eta \in \widehat{G/H}$ такав да је $\eta(\pi(x)) \neq 1$. Тада је $\eta(\pi(y)) = \eta(H) = 1$ за све $y \in H$, па $\eta \circ \pi \in H^\perp$, па онда $x \notin (H^\perp)^\perp$, што је контрадикција. ■

Теорема 3.29. Нека је H затворена подгрупа од G и $\pi : G \to G/H$ канонска пројекција. Тада су пресликавања $\Phi : \widehat{G/H} \to H^\perp$ и $\Psi : \widehat{G}/H^\perp \to \widehat{H}$ дефинисана са

$$\Phi(\eta) = \eta \circ \pi \quad , \quad \Psi(\xi H^\perp) = \xi|_H,$$

изоморфизми тополошких група.

Доказ: Тривијално је показати да је Φ мономорфизам група $\widehat{G/H} \to H^\perp$. За сурјективност узмимо $\xi \in H^\perp$. Тада је $\xi \equiv 1$ на H, па по својству количничких простора, постоји непрекидно пресликавање $\eta : G/H \to \mathrm{T}$ тако да је $\xi = \eta \circ \pi$. Тада за $x, y \in G$ важи

$$\eta((xy)H) = \xi(xy) = \xi(x)\xi(y) = \eta(xH)\eta(yH),$$

па $\eta \in \widehat{G/H}$ и $\Phi(\eta) = \xi$. Узмимо сада мрежу η_α у $\widehat{G/H}$, такву да $\eta_\alpha \to \eta$ у $\widehat{G/H}$ и нека је K компактан у G. Тада је $\pi(K)$ компактан у G/H, па

$\eta_\alpha \to \eta$ униформно конвергира на K, одакле $\eta_\alpha \circ \pi \to \eta \circ \pi$ униформно конвергира на K, тј. $\Phi(\eta_\alpha) \to \Phi(\eta)$ у $\widehat{G}$. Обрнуто, узмимо мрежу $\eta_\alpha \circ \pi$ у $H^\perp$ која конвергира ка $\eta \circ \pi \in H^\perp$ у $\widehat{G}$ и нека је $F \subseteq G/H$ компактан. Тада по Ставу 1.4(б) постоји компактан $K \subseteq G$ тако да је $\pi(K) = F$, па како $\eta_\alpha \circ \pi \to \eta \circ \pi$ униформно на K, то $\eta_\alpha \to \eta$ униформно на F, па коначно и $\eta_\alpha \to \eta$ у $\widehat{G/H}$. Тиме смо показали да је Φ хомеоморфизам, па тиме и изоморфизам тополошких група.
Тривијално се проверава да је Ψ добро дефинисан хомоморфизам група. Заменимо G са $\widehat{G}$ и H са $H^\perp$ у управо доказани изоморфизам Φ, а затим искористимо прошли став 3.28 $\widehat{\widehat{G}/H^\perp} \cong (H^\perp)^\perp = H$. Конкретно, за $x \in H$ одговарајући елемент η на $\widehat{\widehat{G}/H^\perp}$ је дат са

$$\eta(\xi H^\perp) = \xi(x).$$

Понтрјагинова теорема о дуалности даје нам изоморфизам $\widehat{G}/H^\perp \cong \widehat{\widehat{\widehat{G}/H^\perp}} \cong \widehat{H}$, што је у ствари рестрикција пресликавања Ψ на H. ■

Из сурјективности пресликавања Ψ добијамо неки вид Хан-Банахове теореме за локално компактне Абелове групе којом завршавамо ово поглавље:

Последица 3.30. Ако је H затворена подгрупа од G, тада се сваки карактер на H може проширити до карактера на G.

Поглавље 4: Томита-Такесакијева теорија

У поглављу које следи, изложићемо причу о једној од најпознатијих теорија о фон Нојмановим алгебрама - такозвану Томита-Такесакијеву (модуларну) теорију. Сама теорија на први поглед нема никакве везе са претходним излагањима. Ипак постоје два врло чврста разлога зашто је она нашла своје место овде. Први је да је сама по себи врло значајна теорија у операторским алгебрама. Најбољи показатељ тога јесте чињеница да је она одиграла можда и најбитнију улогу у теорији фактора типа III, за коју је, између осталог, Алан Кон[16] добио Филдсову медаљу. Други је што само излагање има огромну примену како у заснивању, тако и у доказивању теорије у наредном поглављу, која јесте примена саме анализе на локално компактним Абеловим групама. Циљ овог поглавља је да се уведу појмови као што је лева Хилбертова алгебра, који ће вишеструко бити коришћени у следећој глави, као и да се после детаљног излагања докаже Томитина теорема. Саму теорију доказао је Томита[17] 1967. године, али ју је употпунио његов ученик, Масамичи Такесаки[18], и објавио три године касније у (Tak70). Принцип излагања одговара Такесакијевом, јер се врло сличан користи и у наредној глави. Треба напоменути да постоји и други приступ преко цикличног, раздвајујућег вектора који је увео Алфонс ван Дале[19] у свом раду (Dae74).

4.1 Леве и десне Хилбертове алгебре

Дефиниција 4.1. Инволутивна алгебра $\mathfrak{A}$ над $\mathbb{C}$, са инволуцијом $\xi \in \mathfrak{A} \mapsto \xi^{\#} \in \mathfrak{A}$ (односно $\xi \in \mathfrak{A} \mapsto \xi^{\flat} \in \mathfrak{A}$), се назива **лева** (односно **десна**) **Хилбертова алгебра** (користи се и појам **модуларна алгебра**), ако је на $\mathfrak{A}$ дефинисан скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ са следећим својствима:

(1) За сваки фиксиран $\xi \in \mathfrak{A}$, оператор левог (десног) множења

[16] Alain Connes (1947-), француски математичар

[17] Minoru Tomita (1924-2015.), јапански математичар

[18] Masamichi Takesaki (1933-), јапански математичар

[19] Alfons Van Daele, белгијски математичар

$\pi_l(\xi) : \eta \in \mathfrak{A} \mapsto \xi\eta \in \mathfrak{A}$ (односно $\pi_r(\xi) : \eta \in \mathfrak{A} \mapsto \eta\xi \in \mathfrak{A}$) је ограничен на $\mathfrak{A}$;
(2) $\langle \xi\eta, \zeta \rangle = \langle \eta, \xi^{\#}\zeta \rangle$ (односно $\langle \xi\eta, \zeta \rangle = \langle \xi, \zeta\eta^{\flat} \rangle$);
(3) Инволуција $\xi \in \mathfrak{A} \mapsto \xi^{\#} \in \mathfrak{A}$ (односно $\xi \in \mathfrak{A} \mapsto \xi^{\flat} \in \mathfrak{A}$) је затворива;
(4) Подалгебра која је линеарно генерисана свим могућим производима $\xi, \eta \in \mathfrak{A}$, означена природно са $\mathfrak{A}^2$ је густа у $\mathfrak{A}$ у односу на скаларни производ.

Напомена 4.1. Уколико је инволуција на левој Хилбертовој алгебри $\mathfrak{A}$ изометрија, тада је $\mathfrak{A}$ такође и десна Хилбертова алгебра. У том случају, кажемо да је $\mathfrak{A}$ унимодуларна Хилбертова алгебра и инволуцију означавамо са $\xi \mapsto \xi^*$.
Као први пример одмах наводимо везу на којој ћемо заснивати примену хармонијске анализе на локално компактним Абеловим групама у операторским алгебрама.

Пример 4.1. Нека је G локално компактна са левом Харовом мером dx и модуларном функцијом $\Delta(x)$. Векторски простор $C_c(G)$ свих непрекидних функција са компактним носачем на G је лева Хилбертова алгебра у односу на производ, инволуцију и скаларни производ дефинисан на следећи начин:

$$(\xi\eta)(x) = \int_G \xi(y)\eta(y^{-1}x)dx;$$

$$\xi^{\#}(x) = \Delta(x^{-1})\overline{\xi(x^{-1})}, \quad x \in G;$$
$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_G \xi(x)\overline{\eta(x)}dx.$$

Напомена 4.2. Ако бисмо дефинисали инволуцију $\xi^{\flat}(x) = \overline{\xi(x^{-1})}$, тада би $C_c(G)$ била десна Хилбертова алгебра.
Још један пример ће нам бити значајан у самом раду:

Пример 4.2. Нека је $\mathcal{M} \subset B(\mathfrak{H})$ фон Нојманова алгебра са цикличним и раздвајајућим вектором Ω (тада је он цикличан и за $\mathcal{M}'$). Нека је $\mathfrak{A} = \mathcal{M}\Omega$ и дефинишимо производ и иволуцију као

$$(x\Omega)(y\Omega) = xy\Omega, x, y \in \mathcal{M};$$

$$(x\Omega)^{\#} = x^*\Omega,$$

док је скаларни производ на $\mathfrak{A}$ наслеђен из $\mathfrak{H}$. Тада је $\mathfrak{A}$ лева Хилбертова алгебра, у којој је Ω јединица, па је у питању једна унитална Хилбертова алгебра.

Пример 4.3. Нека је $\mathcal{M}$ фон Нојманова алгебра и φ позитиван линеаран функционал. Нека је $\mathfrak{A}$ количнички простор фон Нојманове алгебре $\mathcal{M}$ са потпростором $\{x \in \mathcal{M} | \varphi(x^*x) = 0\}$ и η_φ пројекција $\mathcal{M}$ на $\mathfrak{A}$. Тада је $\mathfrak{A}$ лева Хилбертова алгебра са инволуцијом $\eta_\varphi(x)^\# := \eta_\varphi(x^*)$ и скаларним производом $\langle \eta_\varphi(x), \eta_\varphi(y) \rangle := \varphi(y^*x)$.

Посматрајмо сада фиксирану Хилбертову алгебру $\mathfrak{A}$ и означимо њено комплетирање у односу на скаларни производ са $\mathfrak{H}$. Тада из својства (1) из дефиниције 4.1, сваком $\xi \in \mathfrak{A}$ одговара јединствени оператор $\pi_l(\xi)$ и пресликавање $\pi_l : \xi \in \mathfrak{A} \mapsto \pi_l(\xi) \in B(\mathfrak{H})$ је једна *-репрезентација инволутивне алгебре $\mathfrak{A}$. При том, у питању је недегенерисана репрезентација, што знамо из особине (4) дефиниције 4.1.

Дефиниција 4.2. Фон Нојманова алгебра генерисана са $\pi_l(\mathfrak{A})$ се назива **лева фон Нојманова алгебра** и означавамо је са $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$. Дакле, $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A}) = \pi_l(\mathfrak{A})''$.

Наравно, аналогно ћемо дефинисати десну фон Нојманову алгебру. Нека је сада $\mathfrak{A}$ десна Хилбертова алгебра и поново $\mathfrak{H}$ њено комплетирање. Тада је сваком $\eta \in \mathfrak{A}$ придружен оператор $\pi_r(\eta)$ и притом је $\pi_r : \eta \in \mathfrak{A} \mapsto \pi_r(\eta) \in B(\mathfrak{H})$ је анти*-репрезентација у смислу да је $\pi_r(\eta_1\eta_2) = \pi_r(\eta_2)\pi_r(\eta_1)$.

Дефиниција 4.3. Фон Нојманова алгебра генерисана са $\pi_r(\mathfrak{A})$ се назива **десна фон Нојманова алгебра** и означавамо је са $\mathfrak{R}_r(\mathfrak{A})$. Дакле, $\mathfrak{R}_r(\mathfrak{A}) = \pi_r(\mathfrak{A})''$ (овде је, напоменимо, $\mathfrak{A}$ десна Хилбертова алгебра).

У даљим излагањима ћемо без наглашвања посматрати леву Хилбертову алгебру $\mathfrak{A}$. Означимо са S_0 инволуцију $\xi \in \mathfrak{A} \mapsto \xi^\# \in \mathfrak{A}$. Тада из особине (3) дефиниције 4.1 леве Хилбертове алгебре знамо да је S_0 затворив. Означимо са S затворење оператора S_0, а са $\mathfrak{D}^\#$ његов домен. Често ћемо у тексту писати $\xi^\#$ уместо $S\xi$. Сада на $\mathfrak{D}^\#$ можемо да дефинишемо скаларни производ и норму на начин уобичајен за неограничене операторе:

$$\langle \xi, \eta \rangle_\# = \langle \xi, \eta \rangle + \langle S\eta, S\xi \rangle, \quad \xi\eta \in \mathfrak{D}^\#;$$

$$\|\xi\|_\# = \sqrt{\|\xi\| + \|S\xi\|}.$$

Приметимо да у односу на стандардан запис, постоји само једна мала разлика. У првој једначини је у другом сабирку окренут редослед због антисиметричности оператора S.
Сада ћемо увести потребне термине и доказати својства која за њих важе тежећи ка првом циљу, а то је да пронађемо десну Хилбертову алгебру, за коју ће њена десна фон Нојманова алгебра бити једнака комутанту задате леве фон Нојманове алгебре.

Лема 4.4. (1) Нека је $\xi \in \mathfrak{H}$, тада $\xi \in \mathfrak{D}^{\#}$ акко постоји низ $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ у $\mathfrak{A}$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi\| = 0$ и $\{\xi_n^{\#}\}_{n\in\mathbb{N}}$ је Кошијев низ у $\mathfrak{H}$. У том случају знамо и да важи:

$$\xi^{\#} = \lim_{n\to\infty} \xi_n^{\#}$$

(2) $\mathfrak{D}^{\#}$ је комплетан у односу на норму индуковану са $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\#}$ и $\mathfrak{A}$ је густ у $\mathfrak{D}^{\#}$.

Доказ: (1) Нека $\xi \in \mathfrak{D}^{\#}$, тада $(\xi, S\xi) \in \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ припада графику S. Тада постоји низ $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ у $\mathfrak{A}$, тако да $(\xi_n, \xi_n^{\#}) \in \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}$ тежи ка $(\xi, S\xi)$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi\| = 0$ и $\lim \|\xi_n^{\#} - S\xi\| = 0$. Самим тим је низ $\{\xi_n^{\#}\}_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев.
Обратно, узмимо да низ из $\mathfrak{A}$ $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ тежи ξ и да је низ $\{\xi_n^{\#}\}_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев. Тада је низ $(\xi_n, \xi_n^{\#})$ Кошијев у графику инволуције, па конвергира ка некој тачки из графика пресликавања S. Тада прва координата ξ_n конвергира ка $\xi \in \mathfrak{D}^{\#}$, а из услова за другу координату закључујемо $\xi^{\#} = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n^{\#}$.

(2) Узмимо произвољан Кошијев низ $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ у односу на норму $\|\cdot\|_{\#}$ у $\mathfrak{D}^{\#}$. Како је по самој дефиницији наведена норма не мања од полазне норме на $\mathfrak{H}$, тада је тај низ Кошијев и у односу на полазну норму, па тиме конвергира ка неком $\xi \in \mathfrak{H}$. Из дефиниције скаларног производа је $\|\eta^{\#}\| \leqslant \|\eta\|_{\#}$ за све $\eta \in \mathfrak{D}^{\#}$, па је $\{\xi_n^{\#}\}_{n\in\mathbb{N}}$ такође Кошијев. Сада директно из првог дела имамо да $\xi \in \mathfrak{D}^{\#}$, и коначно је $\mathfrak{D}^{\#}$ комплетан у односу на $\|\cdot\|_{\#}$. Други део тврђења је тривијалан, јер је $\mathfrak{A}$ густ у $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{D}^{\#}$. ■

Сада ћемо доказати низ својстава од којих ћемо многа често користити у наставку.

Лема 4.5. (1) $S = S^{-1}$
(2) Постоји антилинеаран густо дефинисан затворен оператор F са доменом $\mathfrak{D}^{\flat}$ тако да је
(а) $\mathfrak{D}^{\flat} = \{\eta \in \mathfrak{H} | \xi \in \mathfrak{D}^{\#} \mapsto \langle \eta, S\xi \rangle$ је ограничен$\}$;
(б) $\langle S\xi, \eta \rangle = \langle F\eta, \xi \rangle$, за све $\xi \in \mathfrak{D}^{\#}$, $\eta \in \mathfrak{D}^{\flat}$.
(3) $F = F^{-1}$.

(4) $\Delta = FS$ је линеаран позитиван несингуларан самоадјунгован оператор такав да је $\mathfrak{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}^{\#}$.
(5) Постоји антилинеарна изометрија J на $\mathfrak{H}$ тако да:
(а) $\langle J\xi, J\eta\rangle = \langle \eta, \xi\rangle, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{H}$;
(б) $J = J^{-1}$;
(в) $J\Delta J = \Delta^{-1}$;
(г) $S = J\Delta^{\frac{1}{2}} = \Delta^{-\frac{1}{2}}J$;
(д) $F = J\Delta^{-\frac{1}{2}} = \Delta^{\frac{1}{2}}J$.
(6) J и Δ су јединствено одређени својством (5)(д) и $\mathfrak{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}^{\#}$.

Доказ: (1) Из претходне леме је јасно да је $S\mathfrak{D}^{\#} = \mathfrak{D}^{\#}$. Нека је $S\xi = 0$, за $\xi \in \mathfrak{D}^{\#}$. На основу исте леме постоји низ $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ у $\mathfrak{A}$ који конвергира ка ξ и важи $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n^{\#} = S\xi = 0 \in \mathfrak{A}$. Ако означимо са $\eta_n := \xi_n^{\#}$, тада $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира у норми ка 0 и $\{\eta_n^{\#}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ је Кошијев (конвергира ка 0), па је још једном по претходној Леми $0 = 0^{\#} = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$. Одатле је S инјективан, па постоји S^{-1}. Како је $S_0 = S_0^{-1}$, S бијективно слика $\mathfrak{D}^{\#}$ у $\mathfrak{D}^{\#}$ и $\mathfrak{A}$ густ у $\mathfrak{D}^{\#}$, то је $S = S^{-1}$, што је и био циљ.
(2) Оператор F је адјунгован оператор оператора S. Сада из особина адјунгованог неограниченог оператора (наравно уз чињеницу да је S антилинеаран) знамо да је F густо дефинисан, затворен и да му је домен баш као у 2(а).
(3) Следи из (2) и чињенице да је $S = S^{-1}$.
(4) Нека је $\Delta := FS$. Тада је Δ несингуларан јер су S и F инвертибилни и линеаран као композиција два антилинеарна пресликавања. Приметимо да је $\mathfrak{D}(\Delta) = \{\xi \in \mathfrak{D}^{\#} | S\xi \in \mathfrak{D}^{\flat}\}$. За произвољан $\xi \in \mathfrak{D}^{\#}$ важи

$$\langle \Delta\xi, \xi\rangle = \langle FS\xi, \xi\rangle = \langle S\xi, S\xi\rangle = \|S\xi\| \geqslant 0,$$

па је Δ позитиван. Како је очигледно $\Delta \subset \Delta^*$, то је Δ симетричан. Претпоставимо сада да $(\xi_n, \Delta\xi_n) \to (\xi_0, \eta_0)$. Тада је

$$\begin{aligned} \|S\xi_n - S\xi_m\|^2 &= \langle S(\xi_n - \xi_m), S(\xi_n - \xi_m)\rangle \\ &= \langle \Delta(\xi_n - \xi_m), \xi_n - \xi_m\rangle \\ &\leqslant \|\Delta(\xi_n - \xi_m)\| \|\xi_n - \xi_m\|, \end{aligned}$$

па како су оба низа конвергентна, то је $\{S\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев. Тада је по Леми 4.4 $\xi_0 \in \mathfrak{D}^{\#}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S\xi_n = S\xi_0$. Онда $(S\xi_n, \Delta\xi_n) = (S\xi_n, FS\xi_n) \to (S\xi_0, \eta_0)$ па из затворивости F имамо да је $\eta_0 = FS\xi_0 = \Delta\xi_0$, па је Δ затворен. Знамо да је затворен симетричан оператор A самоадјунгован ако је $ker(A -$

$i) = ker(A+i) = 0$. Доказаћемо да је то испуњено. Узмимо произвољан $\xi \in ker(\Delta - i)\backslash\{0\}$. Тада је $\Delta\xi = i\xi$ и

$$\|\Delta\xi\|^2 = \langle\Delta\xi, \Delta\xi\rangle = -i\langle\Delta\xi, \xi\rangle.$$

Како је Δ несингуларан, то је $\|\Delta\xi\|^2 \neq 0$. Из позитивности Δ је $\langle\Delta\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R}$, па израз слева у последњој једнакости је позитиван број, а здесна чисто имагинаран, што даје контрадикцију. Слично се показује да је $ker(\Delta+i) = 0$, па је Δ самоадјунгован. Коначно, из поларног разлагања оператора S и према претходном рачуну, постоји антилинеарна (јер је такав и S) изометрија J, тако да је $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$. Одатле следи да је $\mathfrak{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}^{\#}$, што је и требало показати.
(5) Нека је J као у (4). Већ знамо да је J антилинеарна изометрија па важи (а). Како је $S = S^{-1}$, то је

$$J\Delta^{-\frac{1}{2}}J^{-1} = JS^{-1} = JS = J^2\Delta^{\frac{1}{2}}.$$

Како је Δ позитиван и самоадјунгован, такви су и $\Delta^{\frac{1}{2}}$ и $J\Delta^{-\frac{1}{2}}J^{-1}$. Јединственост поларне декомпозиције нам даје једнакости $J^2 = 1$ (што је део (б)) и $J\Delta^{-\frac{1}{2}}J^{-1} = \Delta^{\frac{1}{2}}$. Из

$$S = S^{-1} = \Delta^{-\frac{1}{2}}J^{-1} = \Delta^{-\frac{1}{2}}J,$$

добијамо (г). Како је $J^* = J^{-1} = J$, то важи

$$F = S^* = (J\Delta^{\frac{1}{2}})^* = \Delta^{\frac{1}{2}}J^* = \Delta^{\frac{1}{2}}J,$$

па важи први део (д). Други део следи из $F = F^{-1}$. Коначно, (в) важи из (г) и (д)

$$J\Delta J = J\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}J = SF = \Delta^{-\frac{1}{2}}JJ\Delta^{-\frac{1}{2}} = \Delta^{-1}.$$

(6) Следи из јединствености поларног разлагања. ∎

Дефиниција 4.4. Оператори Δ и J дефинисани у претходној Леми називају се редом **модуларни оператор** и **модуларна конјугација** на левој Хилбертовој алгебри $\mathfrak{A}$.

Дефиниција 4.5. Вектор $\eta \in \mathfrak{H}$ је **ограничен здесна** ако

$$\sup\{\|\pi_l(\xi)\eta\| \mid \xi \in \mathfrak{A}, \|\xi\| \leqslant 1\} < +\infty.$$

Скуп свих вектора ограничених здесна означавамо са $\mathfrak{B}'$.

Очигледно, $\eta \in \mathfrak{B}'$ акко постоји $a \in B(\mathfrak{H})$ тако да је $a\xi = \pi_l(\xi)\eta$ за све $\xi \in \mathfrak{A}$. Како је a јединствено одређен са η, то можемо дефинисати оператор $\pi_r(\eta) := a$. Приметимо да је $\mathfrak{B}'$ линеаран потпростор од $\mathfrak{H}$, који није нужно затворен, и да је π_r линеаран.

Лема 4.6. (1) $\mathfrak{B}'$ је инваријантан у односу на $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$;
(2) $\mathfrak{n}_r := \pi_r(\mathfrak{B}')$ је леви идеал алгебре $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$ и

$$\pi_r(a\eta) = a\pi_r(\eta), \quad a \in \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})', \eta \in \mathfrak{B}'.$$

Доказ: Нека је $a \in \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$, $\xi \in \mathfrak{A}$ и $\eta \in \mathfrak{B}'$. Тада важи:

$$\pi_l(\xi)(a\eta) = a\pi_l(\xi)\eta = a\pi_r(\eta)\xi,$$

где прва једнакост важи јер $a \in \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$, а друга по дефиницији π_r. Како је $\|a\pi_r(\eta)\xi\| \leqslant \|a\|\|\pi_r(\eta)\|\|\xi\|$, закључујемо да $a\eta \in \mathfrak{B}'$, чиме смо показали (1). Такође, из претходног разматрања имамо да је $\pi_r(a\eta) = a\pi_r(\eta)$. Узмимо сада произвољно $\zeta \in \mathfrak{A}$. Тада имамо:

$$\pi_r(\eta)\pi_l(\xi)\zeta = \pi_r(\eta)(\xi\zeta) = \pi_l(\xi\zeta)\eta = \pi_l(\xi)\pi_l(\zeta)\eta = \pi_l(\xi)\pi_r(\eta)\zeta,$$

па $\pi_r(\eta) \in \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$. Коначно, (2) следи из овог закључка и линеарности π_r (приметимо да смо у (1) доказали да је $\mathfrak{n}_r$ леви идеал алгебре $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$). ■

Сада можемо да проширимо множење са $\mathfrak{A}$ на ширу класу па означимо:

$$\xi\eta = \pi_l(\xi)\eta, \quad \xi \in \mathfrak{A}, \eta \in \mathfrak{H},$$

$$\xi\eta = \pi_r(\eta)\xi, \quad \xi \in \mathfrak{H}, \eta \in \mathfrak{B}'.$$

Напоменимо да проширено множење остаје асоцијативно из комутативности $\pi_l(\mathfrak{A})$ и $\pi_r(\mathfrak{B}')$:

$$(\xi\zeta)\eta = (\pi_l(\xi)\zeta)\eta = \pi_r(\eta)(\pi_l(\xi)\zeta) = \pi_l(\xi)\pi_r(\eta)\zeta = \xi(\pi_r(\eta)\zeta) = \xi(\zeta\eta),$$

где $\xi \in \mathfrak{A}, \zeta \in \mathfrak{H}, \eta \in \mathfrak{B}'$. Подсетимо се да можемо писати $\xi^{\#}$ уместо $S\xi$, за $\xi \in \mathfrak{D}^{\#}$, па дефинишимо $\eta^{\flat} := F\eta$, за $\eta \in \mathfrak{D}^{\flat}$. Најавимо да ће очигледно ово бити инволуција на нашој десној Хилбертовој алгебри и дефинишимо:

$$\mathfrak{A}' := \mathfrak{B}' \cap \mathfrak{D}^{\flat}.$$

Уз претходну нотацију, важи следећа лема:

Лема 4.7. (1) $\pi_r(\mathfrak{B}')^*\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{A}'$.;
(2) $(\pi_r(\eta_1)^*\eta_2)^\flat = \pi_r(\eta_2)^*\eta_1$, за $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{B}'$;
(3) $\mathfrak{A}'$ задовољава услове (1),(2),(3) дефиниције десне Хилбертове алгебре.

Доказ: Нека су $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{B}'$ и означимо $\eta = \pi_r(\eta_1)^*\eta_2$. Из претходне леме знамо да је $\mathfrak{B}'$ $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$ инваријантан и да $\pi_r(\eta_1)^* \in \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$. Одатле (из инваријантности) $\eta \in \mathfrak{B}'$. За произвољно $\xi \in \mathfrak{A}$ важи:

$$\begin{aligned}\langle \xi^\#, \eta \rangle = \langle \xi^\#, \pi_r(\eta_1)^*\eta_2 \rangle &= \langle \pi_r(\eta_1)\xi^\#, \eta_2 \rangle = \langle \pi_l(\xi^\#)\eta_1, \eta_2 \rangle \\ &= \langle \pi_l(\xi)^*\eta_1, \eta_2 \rangle = \langle \eta_1, \pi_l(\xi)\eta_2 \rangle \\ &= \langle \eta_1, \pi_r(\eta_2)\xi \rangle = \langle \pi_r(\eta_2)^*\eta_1, \xi \rangle,\end{aligned}$$

па како је последњи члан ограничен са $\|\eta\|\|\xi\|$, то $\eta \in \mathfrak{D}^\flat$, па важи (2), јер је $\eta^\flat = \pi_r(\eta_2)^*\eta_1$.
Како је $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{B}'$, услов (1) дефиниције директно важи. Важење услова (3) је јасно, јер већ знамо да је инволуција затворива са затворењем F. ■

Лема 4.8. Нека је $\eta \in \mathfrak{D}^\flat$ фиксирано и нека су оператори a_0 и b_0 са доменом $\mathfrak{A}$ дефинисани на следећи начин:

$$a_0\xi := \pi_l(\xi)\eta, \quad b_0\xi := \pi_l(\xi)\eta^\flat, \quad \xi \in \mathfrak{A}.$$

Тада:
(1) a_0 и b_0 су затвориви и важи $a_0 \subset b_0^*$ и $b_0 \subset a_0^*$;
(2) Ако је $\pi_r(\eta) := a_0^{**}$ и $\pi_r(\eta^\flat) := b_0^{**}$, тада су $\pi_r(\eta)$ и $\pi_r(\eta^\flat)$ придружени $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$ у смислу да сваки унитаран у $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$ комутира са $\pi_r(\eta)$ и $\pi_r(\eta^\flat)$.

Напомена 4.3. Како не мора важити $\eta \in \mathfrak{B}'$, $\pi_r(\eta)$ не мора постојати и тиме је увођење a_0 неопходно.

Доказ: (1) Узмимо произвољне $\xi, \zeta \in \mathfrak{A}$, тада имамо:

$$\begin{aligned}\langle a_0\xi, \zeta \rangle = \langle \pi_l(\xi)\eta, \zeta \rangle = \langle \eta, \pi_l(\xi)^*\zeta \rangle = \langle \eta, \xi^\#\zeta \rangle &= \langle (\xi^\#\zeta)^\#, \eta^\flat \rangle \\ &= \langle \zeta^\#\xi, \eta^\flat \rangle = \langle \xi, \pi_l(\zeta)\eta^\flat \rangle = \langle \xi, b_0\zeta \rangle,\end{aligned}$$

па је $a_0 \subset b_0^*$, а одатле $b_0 \subset a_0^*$. Како су a_0 и b_0 густо дефинисани, знамо да су a_0^*, b_0^* затворени, па из претходног знамо да су a_0 и b_0 затвориви, што смо и хтели да покажемо.

(2) Приметимо да је дефинисање $\pi_r(\eta)$ и $\pi_r(\eta^\flat)$ као у леми, само другачији начин да се искаже да је $\pi_r(\eta)$ затворење оператора a_0 и $\pi_r(\eta^\flat)$ затворење оператора b_0. Приметимо да је за дати унитаран $u \in \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$, $ua_0^{**}u^* = (ua_0^*u^*)^*$, па је довољно показати да је a_0^* придружен $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$ (по симетрији ће исто важити за b_0^{**}).
Узмимо стога произвољно $\zeta \in \mathfrak{D}(a_0^*)$ и $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{A}$. Тада:

$$\begin{aligned}\langle \pi_l(\xi_1)a_0^*\zeta, \xi_2\rangle &= \langle a_0^*\zeta, \xi_1^{\#}\xi_2\rangle = \langle \zeta, a_0(\xi_1^{\#}\xi_2)\rangle = \langle \zeta, \pi_l(\xi_1^{\#}\xi_2)\eta\rangle \\ &= \langle \pi_l(\xi_1)\zeta, \pi_l(\xi_2)\eta\rangle = \langle \pi_l(\xi_1)\zeta, a_0\xi_2\rangle = \langle a_0^*\pi_l(\xi_1)\zeta, \xi_2\rangle,\end{aligned}$$

па $\pi_l(\xi_1)\zeta \in \mathfrak{D}(a_0^*)$ и $a_0^*\pi_l(\xi_1)\zeta = \pi_l(\xi_1)a_0^*\zeta$. Сада узмимо произвољнан унитаран $u \in \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$ и нека је $\{\pi_l(\xi_\alpha)\}$ мрежа која конвергира јако ка u. Тада из управо изведеног рачуна, знамо да за $\zeta \in \mathfrak{D}(a_0^*)$ важи

$$ua_0^*\zeta = \lim_\alpha \pi_l(\xi_\alpha)a_0^*\zeta = \lim_\alpha a_0^*\pi_l(\xi_\alpha)\zeta,$$

па $u\zeta \in \mathfrak{D}(a_0^*)$ и $ua_0^*\zeta = a_0^*u\zeta$, чиме смо показали тражено. ■

Лема 4.9. Нека је $C_c(0, +\infty)$ алгебра свих непрекидних функција са компактним носачем на $(0, +\infty)$. За фиксирано $\eta \in \mathfrak{D}^\flat$, нека је $\pi_r(\eta) = uh = ku$ лево и десно поларно разлагање. Ако $f \in C_c(0, +\infty)$, тада су $f(h)\eta^\flat$ и $f(k)\eta$ ограничени здесна и важи

$$\pi_r(f(h)\eta^\flat) = hf(h)u^* \in \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$$

$$\pi_r(f(k)\eta) = kf(k)u \in \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$$

Доказ: Узмимо произвољно $\xi \in \mathfrak{A}$. Како је $\pi_r(\eta)$ придружен $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$ по претходној Леми знамо да h (позитиван) и $\pi_l(\xi)$ комутирају (исто важи наравно и за k). Одатле је:

$$\pi_l(\xi)f(h)\eta^\flat = f(h)\pi_l(\xi)\eta^\flat = f(h)\pi_r(\eta^\flat)\xi = f(h)\pi_r(\eta)^*\xi = f(h)hu^*\xi = hf(h)u^*\xi$$

$$\pi_l(\xi)f(k)\eta = f(k)\pi_l(\xi)\eta = f(k)\pi_r(\eta)\xi = f(k)ku\xi = kf(k)u\xi.$$

Како је u парцијална изометрија, а $hf(h)$ и $kf(k)$ ограничени по функционалном рачуну, то су $hf(h)u^*$ и $kf(k)u$ ограничени, па су $f(h)\eta^\flat$ и $f(k)\eta$ десно ограничени и важе наведене формуле из поставке леме. ■

Лема 4.10. $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}'^2$ су обе густе у $\mathfrak{D}^\flat$ у односу на норму $\|\cdot\|_\flat$ која је дефинисана са

$$\|\eta\|_\flat := \sqrt{\|\eta\|^2 + \|\eta^\flat\|^2}, \quad \eta \in \mathfrak{D}^\flat.$$

Специјално, обе су густе у $\mathfrak{H}$, па је $\mathfrak{A}'$ десна Хилбертова алгебра.

Доказ: Да су оба $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}'^2$ густи у $\mathfrak{H}$ следиће директно из чињенице да су они густи у $\mathfrak{D}^\flat$ у норми $\|\cdot\|_\flat$ будући да је норма већа или једнака од стандардне и чињенице да је $\mathfrak{D}^\flat$ густ у $\mathfrak{H}$. Такође, други део специјалног тврђења следи лако, јер већ знамо да $\mathfrak{A}'$ задовољава услове (1),(2),(3) десне Хилбертове алгебре, па чињеница да је $\mathfrak{A}'^2$ густ у $\mathfrak{H}$ имплицира да је он густ и у $\mathfrak{A}'$, чиме доказујемо и својство (4).
Подсетимо се да смо дефинисали $\mathfrak{n}_r := \pi_r(\mathfrak{B}')$ (наравно користимо и сву претходну нотацију).
Узмимо произвољно $\eta \in \mathfrak{D}^\flat$. Користећи да је $uh = ku$ поларно разлагање $\pi_r(\eta)$, па тиме и $hu^* = u^*k$ (а одатле и слична тврђења за $f(h)$ и $f(k)$) добијамо да за све $f \in C_c(0,\infty)$ важи (користимо и претходну лему):

$$hf(h) = u^*uhf(h) = u^*kf(k)u = u^*\pi_r(f(k)\eta) = \pi_r(u^*f(k)\eta) \in \mathfrak{n}_r,$$

$$kf(k) = uu^*kf(k) = uhf(h)u^* = u\pi_r(f(h)\eta^\flat) = \pi_r(uf(h)\eta^\flat) \in \mathfrak{n}_r,$$

при чему $u^*f(k)\eta$ и $uf(h)\eta$ припадају $\mathfrak{B}'$ из прошле теореме (то смо тамо показали само без u и u^*, али u је парцијална изометрија).
Узмимо сада $g \in C_c(0,\infty)$ такво да је $f(\lambda) = \lambda g(\lambda), \lambda > 0$. Тада $f(h) = hg(h) \in \mathfrak{n}_r$ и $f(k) = kg(k) \in \mathfrak{n}_r$. Сада узмимо $f_1, f_2 \in C_c(0,\infty)$ такве да је $f(\lambda) = \overline{f_1(\lambda)}f_2(\lambda)$ за $\lambda > 0$, тада

$$f(h) = f_1(h)^*f_2(h) \in \mathfrak{n}_r^*\mathfrak{n}_r \quad , \quad f(k) = f_1(k)^*f_2(k) \in \mathfrak{n}_r^*\mathfrak{n}_r.$$

Из леме 4.8(1) знамо да $\mathfrak{n}_r^*\mathfrak{n}_r \subset \pi_r(\mathfrak{A}')$, па тиме $f(h), f(k) \in \pi_r(\mathfrak{A}')$. Тада постоје $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{A}'$ такви да је $f(h) = \pi_r(\eta_1)$ и $f(k) = \pi_r(\eta_2)$, па је тада $f(h)\eta = \eta\eta_1$ и $f(k)\eta^\flat = \eta^\flat\eta_2$. Како је $\mathfrak{D}^\flat$ затворен у односу на множење, то $f(h)\eta, f(k)\eta^\flat \in \mathfrak{D}^\flat$, па су тиме и у самом $\mathfrak{A}'$, јер су по претходној Леми ограничени здесна. Сада по формулама из претходне леме добијамо

$$\pi_r((f(k)\eta)^\flat) = \pi_r(f(k)\eta)^* = (kf(k)u)^* = u^*kf(k)^* = hf(h)^*u^* = \pi_r(f(h)^*\eta^\flat),$$

одакле следи

$$(f(k)\eta)^\flat = f(h)^*\eta^\flat.$$

Приметимо такође да $f(k)\eta$ и $f(h)\eta^\flat$ припадају $(\mathfrak{A}')^2$.

Узмимо сада позитиван растући низ $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ у $C_c(0,\infty)$ који конвергира ка 1 за $\lambda > 0$. Онда низови $\{f_n(h)\}$ и $\{f_n(k)\}$ конвергирају јако ка пројекторима на слику, означимо их са p и q, оператора h и k, редом. Подсетимо се на овом месту да је пројектор на слику оператора $A \in B(H)$, пројектор на затворење $\{A(x)|x \in H\}$. Како је $\pi_r(\eta)^* = (uh)^* = hu^*$, то се пројектор на слику $\pi_r(\eta)^*$ поклапа са p и слично, пројектор на слику оператора $\pi_r(\eta)$ се поклапа са q. Претпоставимо сада за тренутак да је $q\eta = \eta$ и $p\eta^\flat = \eta^\flat$. Тада $\{f_n(k)\eta\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка η и $\{f_n(h)\eta^\flat\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка $\eta^\flat$. Како је $(f_n(k)\eta)^\flat = f_n(h)^*\eta^\flat = f_n(h)\eta^\flat$, то ће онда да $\{f_n(k)\eta\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергирати ка η у односу на $\|\cdot\|_\flat$ норму, па ће $(\mathfrak{A}')^2$ бити густ у $\mathfrak{D}^\flat$ што и јесте наш циљ. Преостаје нам само да докажемо да $q\eta = \eta$ и $p\eta^\flat = \eta^\flat$. Да бисмо то учинили, показаћемо да $\eta \in q\mathfrak{H}$ и $\eta^\flat \in p\mathfrak{H}$. Нека је $\{\pi_l(\xi_\alpha)\}$ мрежа у $\pi_l(\mathfrak{A})$ која конвергира јако ка идентитету у $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$. Тада је:

$$\eta = \lim_\alpha \pi_l(\xi_\alpha)\eta = \lim_\alpha \pi_r(\eta)\xi_\alpha \in q\mathfrak{H},$$

и потпуно аналогно,

$$\eta^\flat = \lim_\alpha \pi_l(\xi_\alpha)\eta^\flat = \lim_\alpha \pi_r(\eta)^*\xi_\alpha \in p\mathfrak{H},$$

чиме је доказ коначно завршен. ■

Поред ове врло важне леме (закључили смо да је $\mathfrak{A}'$ једна десна Хилбертова алгебра), централни резултат првог дела ове главе је следећа теорема коју ћемо након свих ових лема брзо доказати:

Теорема 4.11. $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})' = \mathfrak{R}_r(\mathfrak{A}')$.

Доказ: Знамо да је $\pi_r(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$, па је $\mathfrak{R}_r(\mathfrak{A}') = \pi_r(\mathfrak{A}')'' \subset \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$, чиме је показан један смер.
Обратно, чињеница да је $(\mathfrak{A}')^2$ густ у $\mathfrak{H}$ повлачи да је $\pi_r(\mathfrak{A}')$ недегенерисана $*-$подалгебра од $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$. Онда је идентитет у $\mathfrak{R}_r(\mathfrak{A}')$, идентитет у $B(\mathfrak{H})$, па можемо пронаћи ограничену мрежу $\{a_i\} \subset \pi_r(\mathfrak{A}')$ која конвергира ка 1. Тада за $x \in \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$ имамо да је $x = \lim a_i^* x a_i$. Али $a_i^* x a_i \in \mathfrak{n}_r^*\mathfrak{n}_r \subset \pi_r(\mathfrak{A}')$, па $x \in \mathfrak{R}_r(\mathfrak{A}')$ чиме је доказан и други смер. ■

Наредна лема показује да је $\mathfrak{A}'$ у суштини и најбољи избор.

Лема 4.12. (1) $\mathfrak{A}^2$ је густ у $\{\mathfrak{D}^\#, \|\cdot\|_\#\}$. Ово имплицира да ако $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{H}$ задовољавају

$$\langle \xi_1^\# \xi_2, \eta_1 \rangle = \langle \eta_2, \xi_2^\# \xi_1 \rangle, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{A},$$

тада $\eta_1 \in \mathfrak{D}^\flat$ и $\eta_1^\flat = \eta_2$.
(2) $\pi_r(\mathfrak{A}') = \mathfrak{n}_r \cap \mathfrak{n}_r^*$ (где је, подсетимо се, $\mathfrak{n}_r = \pi_r(\mathfrak{B}')$), тј. $\pi_r(\mathfrak{A}')$ је скуп свих оператора десног множења, чији је адјунгован оператор такође оператор десног множења.

Доказ: (1) Узмимо произвољно $\xi \in \mathfrak{A}$. Нека је $\{\pi_r(\eta_\alpha)\}$ мрежа у $\pi_r(\mathfrak{A}')$ која конвергира јако ка 1 (ово можемо бирати јер је $\pi_r(\mathfrak{A}')$ недегенерисан). Тада је $\xi = \lim_\alpha \pi_r(\eta_\alpha)\xi = \lim_\alpha \pi_l(\xi)\eta_\alpha$, па тиме $\xi \in \overline{\pi_l(\xi)\mathfrak{H}}$. Без губљења општости, можемо претпоставити да је $\|\pi_l(\xi)\| \leqslant 1$. Дефинишимо сада функцију $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ као

$$p_n(t) := 1 - (1-t)^n.$$

Тада из функционалног рачуна, за оператор a за који је $\|a\| \leqslant 1$, $p_n(a^*a)$ конвергира ка пројектору на слику оператора a коју ћемо ознахити са $p(a)$. Тада је из претходног пасуса $p(\pi_l(\xi))\xi = \xi$ и слично $p(\pi_l(\xi^\#))\xi^\# = \xi^\#$. Онда важе следеће једнакости:

$$\xi = p(\pi_l(\xi))\xi = \lim_{n\to\infty} p_n(\pi_l(\xi)\pi_l(\xi)^*)\xi = \lim_{n\to\infty} p_n(\xi\xi^\#)\xi;$$

$$\begin{aligned}\xi^\# = p(\pi_l(\xi^\#))\xi^\# &= \lim_{n\to\infty} p_n(\pi_l(\xi^\#)\pi_l(\xi^\#)^*)\xi^\# = \lim_{n\to\infty} p_n(\xi^\#\xi)\xi^\# \\ &= \lim_{n\to\infty} \xi^\# p_n(\xi\xi^\#) = \lim_{n\to\infty} (p_n(\xi\xi^\#)\xi)^\#,\end{aligned}$$

при чему се последње две неједнакости могу добити рачуном, заменом у израз за p_n. Овим смо показали да је ξ лимес елемента из $\mathfrak{A}^2$ у $\|\cdot\|_\#$ норми.
Сада, η_1 и η_2 задовољавају еквивалентну једнакост

$$\langle S(\xi_2^\# \xi_1), \eta_1 \rangle = \langle \eta_2, \xi_2^\# \xi_1 \rangle,$$

па ако је $\|\xi_2^\# \xi_1\| \leqslant 1$ тада је $|\langle S(\xi_2^\# \xi_1), \eta_1 \rangle| \leqslant \|\eta_2\|$. Из управо доказаног тврђења (знамо да је $\mathfrak{A}^2$ густ), знамо да је $\eta_1 \in \mathfrak{D}^\flat$ и $F\eta_1 = \eta_1^\flat = \eta_2$, што је и требало показати.
(2) Чињеница $\pi_r(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{n}_r$ важи директно из дефиниције $\mathfrak{A}'$. Да бисмо доказали да важи и $\pi_r(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{n}_r^*$, приметимо да за $\eta \in \mathfrak{D}^\flat$ важи $\pi_r(\eta) = \pi_r(\eta)^{**} = \pi_r(\eta^\flat)^*$, одакле добијамо и $\pi_r(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{n}_r^*$.

Обратно, претпоставимо да $\pi_r(\eta_1) \in \mathfrak{n}_r \cap \mathfrak{n}_r^*$, за $\eta_1 \in \mathfrak{B}'$. Тада постоји $\eta_2 \in \mathfrak{B}'$ тако да важи $\pi_r(\eta_1)^* = \pi_r(\eta_2)$. За $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{A}$ тада имамо

$$\begin{aligned}\langle \xi_1^{\#}\xi_2, \eta_1\rangle &= \langle \xi_2, \pi_l(\xi_1)\eta_1\rangle = \langle \xi_2, \pi_r(\eta_1)\xi_1\rangle = \langle \pi_r(\eta_1)^*\xi_2, \xi_1\rangle \\ &= \langle \pi_r(\eta_2)\xi_2, \xi_1\rangle = \langle \pi_l(\xi_2)\eta_2, \xi_1\rangle = \langle \eta_2, \xi_2^{\#}\xi_1\rangle,\end{aligned}$$

па по делу (1) $\eta_1 \in \mathfrak{D}^\flat$, а самим тим $\eta_1 \in \mathfrak{A}'$ и $\eta_1^\flat = \eta_2$. Тиме смо показали и други смер, тј. да је $\mathfrak{n}_r \cap \mathfrak{n}_r^* \subset \pi_r(\mathfrak{A}')$, чиме је доказ завршен. ■

Сада наводимо дуалне дефиниције и леме (овог пута без доказа, јер се изводе слично као и претходне).

Дефиниција 4.6. (Дуална дефиницији 4.5) Вектор $\xi \in \mathfrak{H}$ је **ограничен слева** ако

$$\sup\{\|\pi_r(\eta)\xi\| | \eta \in \mathfrak{A}', \|\eta\| \leqslant 1\} < +\infty.$$

Скуп свих вектора ограничених слева означавамо са $\mathfrak{B}$.

Очигледно је $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ и за сваки $\xi \in \mathfrak{B}$ његов одговарајући ограничен оператор $\pi_l(\xi)$ на $\mathfrak{H}$ је одређен са:

$$\pi_l(\xi)\eta = \pi_r(\eta)\xi, \quad ,\xi \in \mathfrak{B}, \eta \in \mathfrak{A}'.$$

Лема 4.13. (Дуална Леми 4.6) (1) $\mathfrak{B}$ је инваријантан у односу на $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$; (2) $\mathfrak{n}_l := \pi_l(\mathfrak{B})$ је леви идеал од $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$ и

$$\pi_l(a\xi) = a\pi_l(\xi), \quad a \in \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A}), \xi \in \mathfrak{B}.$$

Као и раније, проширујемо производ на векторе из $\mathfrak{H}$ на уобичајен начин

$$\xi\eta := \pi_l(\xi)\eta, \quad \xi \in \mathfrak{B}, \eta \in \mathfrak{H}.$$

Сада можемо да дефинишемо скуп

$$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{D}^{\#}.$$

Тада ће се аналогно претходним доказима, показати да је $\mathfrak{A}''$ једна лева Хилбертова алгебра при чему је $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}''$, па је $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A}'') = \mathfrak{R}_r(\mathfrak{A}')' = \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})''$. Како се овде ради о фон Нојмановој алгебри, то важи да је $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A}'') = \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$. Такође важи и

Лема 4.14. (Дуална Леми 4.12(2)) $\pi_l(\mathfrak{A}'') = \mathfrak{n}_l \cap \mathfrak{n}_l^*$.

Ако наставимо овај процес дуализације добићемо

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}^{(4)} = ...,$$

$$\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}''' = \mathfrak{A}^{(5)} = ...,$$

Дајемо сада једну дефиницију:

Дефиниција 4.7. Кажемо да је лева Хилбертова алгебра $\mathfrak{A}$ **пуна** ако је $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}''$. За две леве Хилбертове алгебре $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ кажемо да су **еквивалентне** ако су $\mathfrak{A}_1''$ и $\mathfrak{A}_2''$ изометрички $*-$изоморфне.

Напомена 4.4. Како замена $\mathfrak{A}$ са $\mathfrak{A}''$ не утиче на фон Нојманове алгебре $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$, можемо без губитка општости претпостављати да је лева Хилбертова алгебра $\mathfrak{A}$ пуна.
Наведимо за крај овог низа дуалних дефиниција и лема следећу

Лема 4.15. (Дуална Леми 4.8) Нека је $\eta \in \mathfrak{D}^{\#}$ и нека су оператори a_0 и b_0 са доменом $\mathfrak{A}'$ дефинисани са:

$$a_0\eta := \pi_r(\eta)\xi, \quad b_0\eta := \pi_r(\eta)\xi^{\#}, \quad \eta \in \mathfrak{A}'.$$

Тада:
(1) a_0 и b_0 су затвориви и важи $a_0 \subset b_0^*$ и $b_0 \subset a_0^*$;
(2) Ако је $\pi_l(\xi) := a_0^{**}$ и $\pi_l(\eta^{\#}) := b_0^{**}$, тада су $\pi_l(\xi)$ и $\pi_r(\xi^{\#})$ придружени са $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$.

Сада следи низ изразито техничких лема у циљу доказивања нашег главног резултата - Томитине теореме. У њима се користе, између осталог, и основни резултати комплексне анализе.

Лема 4.16. За сваки $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ дефинишимо

$$\gamma(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2(|\omega| - \mathrm{Re}\omega)}}.$$

Тада важи:
(1) $(\Delta - \omega)^{-1}\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ и

$$\|\pi_l((\Delta - \omega)^{-1}\eta)\| \leqslant \gamma(\omega)\|\pi_r(\eta)\|, \quad \eta \in \mathfrak{A}'.$$

(2) $(\Delta^{-1} - \omega)^{-1}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$ и

$$\|\pi_r((\Delta^{-1} - \omega)^{-1}\xi)\| \leqslant \gamma(\omega)\|\pi_l(\xi)\|, \quad \xi \in \mathfrak{A}.$$

Доказ: Доказаћемо само (1), а (2) добијамо аналогним поступком. Узмимо произвољан $\eta \in \mathfrak{A}'$ и дефинишимо $\xi := (\Delta - \omega)^{-1}\eta$ ради лакшег записа (приметимо да је то израз са леве стране у загради). Тада је очигледно $\xi \in \mathfrak{D}(\Delta) \subset \mathfrak{D}^{\#}$. Нека су $\pi_l(\xi) = uh = ku$ лева и десна поларна декомпозиција као и раније. Тада по дуалној леми Леме 4.9 $f(k)\xi \in \mathfrak{A}$ за свако $f \in C_c(0,\infty)$ и важи

$$(f(k)\xi)^{\#} = f(h)^*\xi^{\#}, \quad f \in C_c(0,\infty).$$

Такође важи следећи низ (не)једнакости:

$$\begin{aligned}
2(|\omega| - Re\omega)\|hf(h)\xi^{\#}\|^2 &= 2(|\omega| - Re\omega)\langle hf(h)^*hf(h)\xi^{\#}, \xi^{\#}\rangle \\
&= 2(|\omega| - Re\omega)\langle (kf(k)^*kf(k)\xi)^{\#}, \xi^{\#}\rangle \\
&= 2(|\omega| - Re\omega)\langle \Delta\xi, kf(k)^*kf(k)\xi\rangle \\
&\leqslant 2|\omega|\|kf(k)\Delta\xi\|\|kf(k)\xi\| - 2Re\omega\langle kf(k)\Delta\xi, kf(k)\xi\rangle
\end{aligned}$$

Из АГ неједнакости имамо да важи

$$2|\omega|\|kf(k)\Delta\xi\|\|kf(k)\xi\| \leqslant \|kf(k)\Delta\xi\|^2 + |\omega|^2\|kf(k)\xi\|^2,$$

па настављамо малопређашњи низ

$$\begin{aligned}
2(|\omega| - Re\omega)\|hf(h)\xi^{\#}\|^2 &\leqslant \|kf(k)\Delta\xi\|^2 + |\omega|^2\|kf(k)\xi\|^2 - 2Re\omega\langle kf(k)\Delta\xi, kf(k)\xi\rangle \\
&= \|kf(k)(\Delta - \omega)\xi\|^2 = \|kf(k)\eta\|^2 = \|f(k)k\eta\|^2 \\
&= \|f(k)uu^*k\eta\|^2 = \|f(k)u\pi_l(\xi)^*\eta\|^2 = \|f(k)u\pi_l(\xi^{\#})\eta\|^2 \\
&= \|f(k)u\pi_r(\eta)\xi^{\#}\|^2 = \|\pi_r(\eta)f(k)u\xi^{\#}\|^2 = \|\pi_r(\eta)uf(h)\xi^{\#}\|^2 \\
&\leqslant \|\pi_r(\eta)\|^2\|f(h)\xi^{\#}\|^2.
\end{aligned}$$

Одавде закључујемо да важи:

$$\|hf(h)\xi^{\#}\| \leqslant \gamma(\omega)\|\pi_r(\eta)\|\|f(h)\xi^{\#}\|.$$

У наредном делу ћемо користити пар својстава спектралне мере. Најпре, нека је $h = \int\limits_0^\infty \lambda dE(\lambda)$ спектрална декомпозиција оператора h. Тада се претходна неједнакост може записати у облику:

$$\int\limits_0^\infty \lambda|f(\lambda)|d\|E(\lambda)\xi^{\#}\| \leqslant c\int\limits_0^\infty |f(\lambda)|d\|E(\lambda)\xi^{\#}\|,$$

где смо са c означили $\gamma(\omega)\|\pi_r(\eta)\|$. Одавде знамо да је носач спектралне мере $d\|E(\lambda)\xi^\#\|$ садржан у $[0,c]$, па је $E([0,c])\xi^\# = \xi^\#$. Приметимо да како је h придружен $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$, то E комутира са $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})' = \mathfrak{R}_r(\mathfrak{A}')$, па имамо да је

$$\begin{aligned} E([0,c])\pi_l(\xi)^*\zeta = E([0,c])\pi_l(\xi^\#)\zeta &= E([0,c])\pi_r(\zeta)\xi^\# \\ &= \pi_r(\zeta)E([0,c])\xi^\# = \pi_r(\zeta)\xi^\# = \pi_l(\xi^\#)\zeta, \end{aligned}$$

где трећа једнакост следи из управо поменутог аргумента. Затим, из следећег низа једнакости утврђујемо да је $\xi^\#$ ограничен слева

$$\|\pi_l(\xi^\#)\zeta\| = \|E([0,c])\pi_l(\xi)^*\zeta\| = \|E([0,c])hu^*\zeta\| \leqslant c\|u^*\zeta\| = c\|\zeta\|.$$

Дакле, важи оцена $\|\pi_l(\xi^\#)\zeta\| \leqslant c$. Али онда је и сам ξ ограничен слева и важи тражена неједнакост

$$\|\pi_l((\Delta-\omega)^{-1}\eta)\| = \|\pi_l(\xi)\| = \|\pi_l(\xi)^*\| = \|\pi_l(\xi^\#)\| \leqslant \gamma(\omega)\|\pi_r(\eta)\|.$$

■

Наредна лема је чисто техничка.

Лема 4.17. За произвољан $\eta \in \mathfrak{A}'$, нека је $\xi = (\Delta+s)^{-1}\eta$, за неко $s > 0$ и $\xi \in \mathfrak{D}(\Delta)$. Тада за све $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) \cap \mathfrak{D}(\Delta^{-\frac{1}{2}})$ важи формула

$$\langle \pi_r(\eta)\zeta_1, \zeta_2\rangle = \langle J\pi_l(\xi)^*J\Delta^{-\frac{1}{2}}\xi_1, \Delta^{\frac{1}{2}}\zeta_2\rangle + s\langle J\pi_l(\xi)^*J\Delta^{\frac{1}{2}}\xi_1, \Delta^{-\frac{1}{2}}\zeta_2\rangle.$$

Доказ: Ићи ћемо корак по корак. Најпре претпоставимо да су $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}(\Delta^{-\frac{1}{2}})$, тј. претпостављамо да су они додатно ограничени слева. Тада применом чистог рачуна закључујемо

$$\begin{aligned} \langle \pi_r(\eta)\zeta_1, \zeta_2\rangle &= \langle \pi_l(\zeta_1)\eta, \zeta_2\rangle = \langle \eta, \zeta_1^\#\zeta_2\rangle = \langle (\Delta+s)\xi, \zeta_1^\#\zeta_2\rangle \\ &= \langle FS\xi, \zeta_1^\#\zeta_2\rangle + s\langle \xi, \zeta_1^\#\zeta_2\rangle = \langle \zeta_2^\#\zeta_1, S\xi\rangle + s\langle \zeta_1\xi, \zeta_2\rangle \\ &= \langle \zeta_1, \zeta_2\xi^\#\rangle + s\langle (\xi^\#\zeta_1^\#)^\#, \zeta_2\rangle = \langle \zeta_1, (\xi\zeta_2^\#)^\#\rangle + s\langle (\xi^\#\zeta_1^\#)^\#, \zeta_2\rangle \\ &= \langle \zeta_1, S\pi_l(\xi)S\zeta_2\rangle + s\langle S\pi_l(\xi)^*S\zeta_1, \zeta_2\rangle \\ &= \langle \zeta_1, \Delta^{-\frac{1}{2}}J\pi_l(\xi)J\Delta^{\frac{1}{2}}\zeta_2\rangle + s\langle \Delta^{-\frac{1}{2}}J\pi_l(\xi)^*J\Delta^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \zeta_2\rangle \\ &= \langle \Delta^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, J\pi_l(\xi)J\Delta^{\frac{1}{2}}\zeta_2\rangle + s\langle J\pi_l(\xi)^*J\Delta^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \Delta^{-\frac{1}{2}}\zeta_2\rangle \\ &= \langle J\pi_l(\xi)^*J\Delta^{-\frac{1}{2}}\xi_1, \Delta^{\frac{1}{2}}\zeta_2\rangle + s\langle J\pi_l(\xi)^*J\Delta^{\frac{1}{2}}\xi_1, \Delta^{-\frac{1}{2}}\zeta_2\rangle. \end{aligned}$$

Тиме смо показали да при овом додатном услову важи наведена формула. Како су обе стране тражене формуле сесквилинеарне форме на $\mathfrak{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) \cap$

$\mathfrak{D}(\Delta^{-\frac{1}{2}})$ (користимо чињеницу да $\xi \in \mathfrak{A}$ из претходне леме стављајући $\omega = -s$), довољно је да покажемо да можемо апроксимирати $\zeta \in \mathfrak{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) \cap \mathfrak{D}(\Delta^{-\frac{1}{2}})$ низом $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}(\Delta^{-\frac{1}{2}})$ у смислу да

$$\lim_{n\to\infty} \|\zeta - \zeta_n\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|\Delta^{\frac{1}{2}}(\zeta - \zeta_n)\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|\Delta^{-\frac{1}{2}}(\zeta - \zeta_n)\| = 0.$$

Како је $\mathfrak{A}'$ густ у $\mathfrak{H}$ и како је J антилинеарна изометрија, то је и $\Delta^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{A}' = JF\mathfrak{A}' = J\mathfrak{A}'$ густ у $\mathfrak{H}$. Тада за дато $\zeta \in \mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \cap \mathfrak{D}^{-\frac{1}{2}}$ постоји низ $\{\eta_n\}_{\eta\in\mathbb{N}}$ у $\mathfrak{A}'$ такав да је

$$(\Delta^{\frac{1}{2}} + \Delta^{-\frac{1}{2}})\zeta = \lim_{n\to\infty} \Delta^{-\frac{1}{2}}\eta_n.$$

Дефинишимо $\zeta_n := (1+\Delta)^{-1}\eta_n$. Тада по претходној Леми знамо да $\zeta_n \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}(\Delta^{-\frac{1}{2}})$ и како је $\Delta^{-\frac{1}{2}}(\Delta^{\frac{1}{2}} + \Delta^{-\frac{1}{2}})^{-1} = (1+\Delta)^{-1}$ важи

$$\zeta = (\Delta^{\frac{1}{2}} + \Delta^{-\frac{1}{2}})^{-1} \lim_{n\to\infty} \Delta^{-\frac{1}{2}}\eta_n = \lim_{n\to\infty} (1+\Delta)^{-1}\eta_n = \lim_{n\to\infty} \zeta_n.$$

Израз $(\Delta^{\frac{1}{2}}+\Delta^{-\frac{1}{2}})^{-1}$ може да замени место са лимесом, јер $\zeta_n \in \mathfrak{A}\cap\mathfrak{D}(\Delta^{-\frac{1}{2}}) \subset \mathfrak{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) \cap \mathfrak{D}(\Delta^{-\frac{1}{2}})$. Сада докажимо преостале две чињенице.

$$\begin{aligned}\Delta^{\frac{1}{2}}\zeta &= \Delta^{\frac{1}{2}}(\Delta^{\frac{1}{2}} + \Delta^{-\frac{1}{2}})^{-1}(\Delta^{\frac{1}{2}} + \Delta^{-\frac{1}{2}})\zeta = \Delta(1+\Delta)^{-1} \lim_{n\to\infty} \Delta^{-\frac{1}{2}}\eta_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \Delta^{\frac{1}{2}}(1+\Delta)^{-1}\eta_n = \lim \Delta^{\frac{1}{2}}\zeta_n;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{-\frac{1}{2}}\zeta &= \Delta^{-\frac{1}{2}}(\Delta^{\frac{1}{2}} + \Delta^{-\frac{1}{2}})^{-1}(\Delta^{\frac{1}{2}} + \Delta^{-\frac{1}{2}})\zeta = (1+\Delta)^{-1} \lim_{n\to\infty} \Delta^{-\frac{1}{2}}\eta_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \Delta^{-\frac{1}{2}}(1+\Delta)^{-1}\eta_n = \lim \Delta^{-\frac{1}{2}}\zeta_n,\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. ■

Сада ћемо доказати три леме везане за Фуријеову анализу на апстрактним Банаховим алгебрама, у којима ћемо, као што је већ најављено, користити махом комплексну анализу

Лема 4.18. Нека је A унитална Банахова алгебра. Нека је $\{u(\alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$ комплексна једнопараметарска подгрупа групе $GL(A)$ инвертибилних елемената у A, таква да је

$$u(\alpha + \beta) = u(\alpha)u(\beta), \quad \alpha\beta \in \mathbb{C}.$$

Претпоставимо и да је $\mathbb{C} \ni \alpha \mapsto u(\alpha) \in A$ холоморфна и да је

$$\sup\{\|u(t)\| | t \in \mathbb{R}\} = M < +\infty.$$

Тада је за све $s \in \mathbb{R}$, $e^{-\frac{s}{2}}u\left(-\frac{i}{2}\right) + e^{\frac{s}{2}}u\left(\frac{i}{2}\right)$ инвертибилан и важи

$$\left[e^{-\frac{s}{2}}u\left(-\frac{i}{2}\right) + e^{\frac{s}{2}}u\left(\frac{i}{2}\right)\right]^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} u(t)dt.$$

Доказ: За фиксирано $s \in \mathbb{R}$ дефинишимо функцију

$$f(\alpha) := \frac{e^{-is\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} u(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Тада је f мероморфна $A-$вредносна функција са простим половима у $\alpha = in$, $n \in \mathbb{Z}$. Ако је $\alpha = r + it$ за $r, t \in \mathbb{R}$, тада је $e^{-is\alpha} = e^{st}e^{-isr}$ и $u(\alpha) = u(r)u(it)$. По услову из формулације важи оцена

$$\|f(\alpha)\| \leqslant Me^{st} \frac{1}{|e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}|} \|u(it)\|.$$

За $R > 0$, нека је C_R крива која ограничава област

$$\left\{\alpha \in \mathbb{C} \middle| |Re(\alpha)| \leqslant R, |Im(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}\right\},$$

при чему узимамо оријентацију у смеру супротном од казаљке на сату. Приметимо да за свако R, C_R садржи само један пол функције f, тачније $\alpha = 0$. Оцена одозго нам за фиксирано $t = \pm\frac{1}{2}$, када $|r| \to \infty$, даје $|r|\|f(\alpha)\| \to 0$. Тада наредни интеграл можемо израчунати (коришћењем Жордановизх лема) као:

$$I := \lim_{R\to\infty} \oint\limits_{C_R} f(\alpha)d\alpha = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(r - \frac{i}{2}\right)dr - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(r + \frac{i}{2}\right)dr.$$

Са друге стране, лако је срачунати

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha f(\alpha) = \frac{1}{2\pi},$$

па нам теорема о резидуумима даје

$$I = 2\pi i \lim_{\alpha\to 0} \alpha f(\alpha) = i.$$

Приметимо и да је $e^{\pi\left(r\pm\frac{1}{2}\right)} = \pm ie^{\pi r}$ и аналогно $-e^{-\pi\left(r\pm\frac{1}{2}\right)} = \pm ie^{-\pi r}$. Тада имамо да важи

$$
\begin{aligned}
i = I &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-is\left(r-\frac{i}{2}\right)}}{e^{\pi\left(r-\frac{i}{2}\right)} - e^{-\pi\left(r-\frac{i}{2}\right)}} u\left(r - \frac{i}{2}\right) dr - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-is\left(r+\frac{i}{2}\right)}}{e^{\pi\left(r+\frac{i}{2}\right)} - e^{-\pi\left(r+\frac{i}{2}\right)}} u\left(r + \frac{i}{2}\right) dr \\
&= \frac{e^{-\frac{s}{2}}}{-i} u\left(-\frac{i}{2}\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-isr}}{e^{\pi r} + e^{-\pi r}} u(r) dr - \frac{e^{\frac{s}{2}}}{i} u\left(\frac{i}{2}\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-isr}}{e^{\pi r} + e^{-\pi r}} u(r) dr \\
&= i\left[e^{-\frac{s}{2}} u\left(-\frac{i}{2}\right) + e^{\frac{s}{2}} u\left(\frac{i}{2}\right)\right] \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-isr}}{e^{\pi r} + e^{-\pi r}} u(r) dr,
\end{aligned}
$$

одакле заменом r са t добијамо тражено. ■

Напомена 4.5. Резултат ове леме ћемо записати у еквивалентном облику који ће нам бити погоднији за употребу (проширујући разломак са $e^{\frac{s}{2}} u\left(-\frac{i}{2}\right)$)

$$
e^{\frac{s}{2}} u\left(-\frac{i}{2}\right) (u(-i) + e^{s})^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} u(t) dt, \quad s \in \mathbb{R}.
$$

Одговарајућа једнопараметарска унитарна група на коју ћемо применити претходну лему јесте Δ^{it}. Ипак, чињеница да је Δ неограничен отежава директну примену, па ће бити потребне још неке додатне поправке.

Лема 4.19. За модуларни оператор Δ на пуној левој Хилбертовој алгебри $\mathfrak{A}$ важи:

$$
e^{\frac{s}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}} (\Delta + e^{s})^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \Delta^{it} dt, \quad s \in \mathbb{R}.
$$

Доказ: Нека је $\Delta = \int\limits_{0}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$ спектрална декомпозиција оператора Δ и нека је $E_r := E([\frac{1}{r}, r])$ за $r > 1$. Применићемо резултат из напомене 4.5 на униталну Банахову алгебру $A = B(E_r\mathfrak{H})$ и на $u(\alpha) = (\Delta E_r)^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{C}$ (приметимо да је ΔE_r ограничен, позитиван оператор на $B(E_r\mathfrak{H})$, па су задовољени услови да се ради о једнопараметарској, холоморфној подгрупи $GL(B(E_r\mathfrak{H}))$:

$$e^{\frac{s}{2}}(\Delta E_r)^{\frac{1}{2}}(\Delta E_r + e^s)^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}(\Delta E_r)^{it}dt.$$

Пуштајући лимес кад $r \to \infty$ (E_r тежи јако ка 1) добијамо тражено тврђење. ■

Докажимо сада и последњу у низу техничких лема поново користећи резултат из напомене 4.5.

Лема 4.20. Нека је Δ модуларни оператор за пуну леву Хилбертову алгебру $\mathfrak{A}$. Ако $x, y \in B(\mathfrak{H})$ и $s \in \mathbb{R}$ задовољавају следећи услов за све $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) \cap \mathfrak{D}(\Delta^{-\frac{1}{2}})$:

$$\langle x\zeta_1, \zeta_2\rangle = \langle y\Delta^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \Delta^{\frac{1}{2}}\zeta_2\rangle + e^s\langle y\Delta^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \Delta^{-\frac{1}{2}}\zeta_2\rangle,$$

тада важи

$$e^s y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}\Delta^{it}x\Delta^{-it}dt.$$

Доказ: За $r > 1$ нека је E_r исто као у доказу претходне леме и нека је $A = B(B(E_r\mathfrak{H}))$ и дефинишимо једнопараметарску холоморфну групу $u(\alpha) = \sigma_\alpha$ где је

$$\sigma_\alpha(x) = \Delta^{i\alpha}x\Delta^{-i\alpha}, \quad x \in B(E_r\mathfrak{H}).$$

Тада, јер $E_r\zeta_1, E_r\zeta_2 \in \mathfrak{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) \cap \mathfrak{D}(\Delta^{-\frac{1}{2}})$, важи

$$\begin{aligned}
\langle E_r x E_r\zeta_1, \zeta_2\rangle &= \langle xE_r\zeta_1, E_r\zeta_2\rangle \\
&= \langle y\Delta^{-\frac{1}{2}}E_r\zeta_1, \Delta^{\frac{1}{2}}E_r\zeta_2\rangle + e^s\langle y\Delta^{\frac{1}{2}}E_r\zeta_1, \Delta^{-\frac{1}{2}}E_r\zeta_2\rangle \\
&= \langle \Delta^{\frac{1}{2}}E_r y\Delta^{-\frac{1}{2}}E_r\zeta_1, \zeta_2\rangle + e^s\langle \Delta^{-\frac{1}{2}}E_r y\Delta^{\frac{1}{2}}E_r\zeta_1, \zeta_2\rangle \\
&= \langle [\sigma_{-\frac{i}{2}}(E_r y E_r) + e^s\sigma_{\frac{i}{2}}(E_r y E_r)]\zeta_1, \zeta_2\rangle.
\end{aligned}$$

Одатле је

$$E_r x E_r = (\sigma_{-\frac{i}{2}} + e^s\sigma_{\frac{i}{2}})(E_r y E_r) = (e^{-\frac{s}{2}}\sigma_{-\frac{i}{2}} + e^{\frac{s}{2}}\sigma_{\frac{i}{2}})(e^{\frac{s}{2}}E_r y E_r).$$

Сада по Леми 4.19. вршимо инвертовање и добијамо

$$e^s E_r y E_r = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}\Delta^{it}E_r x E_r\Delta^{-it}dt.$$

Пуштајући лимес кад $r \to \infty$ добијамо тражени резултат. ■

Напомена 4.6. Да бисмо олакшали нотацију, дефинишимо $\rho_s : B(\mathfrak{H}) \to B(\mathfrak{H})$ за $s \in \mathbb{R}$ са:

$$\rho_s(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \Delta^{it} x \Delta^{-it} dt.$$

Коначно смо дошли до тренутка када ће све претходне леме добити свој потпуни смисао и поенту.

Теорема 4.21 (**Томитина теорема**). Нека је $\mathfrak{A}$ лева Хилбертова алгебра са модуларним оператором Δ и модуларном конјугацијом J. Тада је:
(1)

$$J\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})J = \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})';$$

$$J\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'J = \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A});$$

$$\Delta^{it}\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})\Delta^{-it} = \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A});$$

$$\Delta^{it}\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'\Delta^{-it} = \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})', \quad t \in \mathbb{R}$$

(2) Једнопараметарска унитарна група $\{\Delta^{it} | t \in \mathbb{R}\}$ делује на $\mathfrak{A}''$ и $\mathfrak{A}'$ као аутоморфизам, а модуларна конјугација J слика $\mathfrak{A}''$ (односно $\mathfrak{A}'$) на $\mathfrak{A}'$ (односно $\mathfrak{A}''$) анти-изоморфно у смислу да важи

$$J(\xi\eta) = (J\eta)(J\xi), \quad \xi, \eta \in \mathfrak{A}''.$$

Доказ: Лема 4.18 показује да је услов из леме 4.20 задовољен за $x = \pi_r(\eta)$ и $y = J\pi_l((\Delta + e^s)^{-1}\eta)^* J$, па је (у складу са напоменом 4.6)

$$e^{\frac{s}{2}} J\pi_l((\Delta + e^s)^{-1}\eta)^* J = \rho_s(\pi_r(\eta)), \quad \eta \in \mathfrak{A}', s \in \mathbb{R}.$$

Узмимо произвољно $\zeta \in \mathfrak{A}'$. Тада из Леме 4.19 (коју примењујемо у последњој једнакости) и чињенице да је $J^2 = 1$, имамо

$$\begin{aligned} J\rho_s(\pi_r(\eta))J\zeta &= e^{\frac{s}{2}}\pi_l((\Delta + e^s)^{-1}\eta)^*\zeta = e^{\frac{s}{2}}(S(\Delta + e^s)^{-1}\eta)\zeta \\ &= e^{\frac{s}{2}}\pi_r(\zeta)J\Delta^{\frac{1}{2}}(\Delta + e^s)^{-1}\eta \\ &= \pi_r(\zeta)J\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ist}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}\Delta^{it}\eta dt, \end{aligned}$$

па, подсећајући се дефиниције ρ_s, закључујемо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ist}}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}(J\Delta^{it}\pi_r(\eta)\Delta^{-it}J\zeta - \pi_r(\zeta)J\Delta^{it}\eta)dt = 0.$$

Из јединствености Фуријеове трансформације, закључујемо да за све $t \in \mathbb{R}$ важи

$$\frac{e^{-ist}}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}(J\Delta^{it}\pi_r(\eta)\Delta^{-it}J\zeta - \pi_r(\zeta)J\Delta^{it}\eta) = 0$$

тј.

$$J\Delta^{it}\pi_r(\eta)\Delta^{-it}J\zeta = \pi_r(\zeta)J\Delta^{it}\eta.$$

Онда је $\|\pi_r(\zeta)J\Delta^{it}\eta\| = \|J\Delta^{it}\pi_r(\eta)\Delta^{-it}J\zeta\| \leqslant \|J\Delta^{it}\pi_r(\eta)\Delta^{-it}J\|\|\zeta\|$, па је $J\Delta^{it}\eta$ ограничен слева и важи

$$\pi_l(J\Delta^{it}\eta) = J\Delta^{it}\pi_r(\eta)\Delta^{-it}J.$$

Како је $F = \Delta^{\frac{1}{2}}J$, $J\mathfrak{D}^\flat = \mathfrak{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}^\#$, то $J\Delta^{it}\eta \in \mathfrak{A}''$. Стављајући $t = 0$ у $J\Delta^{it}\eta \in \mathfrak{A}''$ добијамо $J\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}''$ и

$$\pi_l(J\eta) = J\pi_r(\eta)J, \quad \eta \in \mathfrak{A}'.$$

Ово повлачи да је J анти-хомоморфизам на $\mathfrak{A}'$ јер

$$(J\xi)(J\eta) = \pi_l(J\xi)J\eta = J\pi_r(\xi)JJ\eta = J\pi_r(\xi)\eta = J(\eta\xi), \quad \xi,\eta \in \mathfrak{A}'.$$

По симетрији добијамо да $J\Delta^{it}\xi \in \mathfrak{A}'$, затим $J\mathfrak{A}'' \subset \mathfrak{A}'$ и

$$\pi_r(J\xi) = J\pi_l(\xi)J \quad \xi \in \mathfrak{A}''.$$

Тако закључујемо да важи

$$J\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}', \quad J\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}''.$$

Такође, из $J\Delta^{it}\eta \in \mathfrak{A}''$ следи да $\Delta^{it}\eta \in \mathfrak{A}'$, а одатле је $\Delta^{it}\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}'$. Да важи једнакост, добијамо заменом t са $-t$. Поново симетријом добијамо и $\Delta^{it}\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}''$. Тиме смо показали да важи (2).
Из чињенице да је $\mathfrak{R}_l(A)' = \mathfrak{R}_r(A')$, дела под (2), симетрије и једнакости $\pi_l(J\Delta^{it}\eta) = J\Delta^{it}\pi_r(\eta)\Delta^{-it}J$, следи део под (1), чиме је доказ завршен у потпуности. ■

За крај овог дела даћемо још једну лему која нам ближе одређује понашање елемената у левим Хилбертовим алгебрама.

Лема 4.22. Нека је $\mathfrak{A}$ пуна лева Хилбертова алгебра, тада сваки централни елемент $a \in \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$ (тј. елемент који притом комутира са свим елементима из $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$) оставља $\mathfrak{D}^{\#}$ и $\mathfrak{D}^{\flat}$ инваријантним и притом важи

$$(a\xi)^{\#} = a^*\xi^{\#}, \quad \xi \in \mathfrak{D}^{\#};$$

$$(a\eta)^{\flat} = a^*\eta^{\flat}, \quad \eta \in \mathfrak{D}^{\flat}.$$

Штавише, важи

$$JaJ = a^*, \quad \Delta^{it}a\Delta^{-it} = a \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доказ: Како $a \in \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$, из леме 4.6 и њој дуалне 4.13 знамо да је n_r леви идеал од $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$, а n_l леви идеал од $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$. Одатле је $a(\mathfrak{n}_r \cap \mathfrak{n}_r^*) \subset \mathfrak{n}_r \cap \mathfrak{n}_r^*$ и $a(\mathfrak{n}_r \cap \mathfrak{n}_r^*) \subset \mathfrak{n}_r \cap \mathfrak{n}_r^*$. Сада по Леми 4.12(2) и њој дуалној 4.14 знамо да $a\pi_r(\mathfrak{A}') \subset \pi_r(\mathfrak{A}')$ и $a\pi_l(\mathfrak{A}) \subset \pi_l(\mathfrak{A})$. Тада за произвољно $\eta \in \mathfrak{A}'$ важи

$$\pi_r((a\eta)^{\flat}) = \pi_r(a\eta)^* = (a\pi_r(\eta))^* = \pi_r(\eta)^*a^* = a^*\pi_r(\eta^{\flat}) = \pi_r(a^*\eta^{\flat}),$$

тј.

$$(a\eta)^{\flat} = a^*\eta^{\flat}.$$

Из чињенице да је $\mathfrak{A}'$ густ у $\mathfrak{D}^{\flat}$ следи да је $\mathfrak{D}^{\flat}$ инваријантан у односу на a и да важи наведена формула. По симетрији, исто важи и за $\mathfrak{D}^{\#}$ и важи $(a\xi)^{\#} = a^*\xi^{\#}$.

Што се другог дела тврђења тиче, претпоставимо да је $a = u$ унитаран, па знамо из претходног да је $u\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ и $u\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'$. Такође, за $\xi \in \mathfrak{D}^{\#}$ важи $Su\xi = u^*S\xi$. Одатле је $uSu = S$, па је

$$J\Delta^{\frac{1}{2}} = uJ\Delta^{\frac{1}{2}}u = uJuu^*\Delta^{\frac{1}{2}}u.$$

Из јединствености поларне декомпозиције закључујемо да је

$$J = uJu, \quad \Delta^{\frac{1}{2}} = u^*\Delta^{\frac{1}{2}}u.$$

Одавде следи да је $Ju = u^*J$ и $\Delta^{it} = u^*\Delta^{it}u$, што су еквивалентне једнакости са траженим. Како је $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$ генерисан линеарним комбинацијама унитарних, то тврђење важи за све $a \in \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$, чиме је доказ завршен. ■

4.2 Томитине алгебре

Идеја у овом одељку јесте да се дефинише самоадјунгована подалгебра $\mathfrak{A}_0$ од $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ истовремено таква да је $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}_0''$ и $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_0'$ и да је на њој $\Delta^{i\alpha}$ цела функција.

Дефиниција 4.8. Лева Хилбертова алгебра $\mathfrak{A}$ се назива **Томитина алгебра** ако $\mathfrak{A}$ дозвољава комплексну једнопараметарску групу $\{U(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ аутоморфизама (који не морају бити *-аутоморфизми), са следећим особинама:
(а) Функција $\mathbb{C} \ni \alpha \mapsto \langle U(\alpha)\xi, \eta\rangle$ је цела;
(б) $(U(\alpha)\xi)^{\#} = U(\overline{\alpha})\xi^{\#}$;
(в) $\langle U(\alpha)\xi, \eta\rangle = \langle \xi, U(-\overline{\alpha})\eta\rangle, \alpha \in \mathbb{C}, \xi, \eta \in \mathfrak{A}$;
(г) $\langle \xi^{\#}, \eta^{\#}\rangle = \langle U(-i)\eta, \xi\rangle$.
Група $\{U(\alpha)|\alpha \in \mathbb{C}\}$ се назива **модуларна група аутоморфизама** на $\mathfrak{A}$.

За крај овог поглавља наводимо теорему којом дајемо један од примера Томитине алгебре. Њен доказ је сличан претходним, али опет технички захтеван, па га на овом месту изостављамо. Доказ се може пронаћи у (Tak03).

Теорема 4.23. (1) За дату пуну леву Хилбертову алгебру $\mathfrak{A}$ са модуларним оператором Δ, ако означимо

$$\mathfrak{A}_0 := \{\xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{D}(\Delta^n) | \Delta^n\xi \in \mathfrak{A}, n \in \mathbb{Z}\},$$

тада је $\mathfrak{A}_0$ Томитина алгебра у односу на $\{\Delta^{i\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$, при чему је

$$\mathfrak{A}_0'' = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}_0' = \mathfrak{A}, \quad J\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0.$$

Специјално, знамо да важи $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A}_0) = \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{R}_r(\mathfrak{A}_0) = \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})'$.
(2) Ако је $\mathfrak{A}$ Томитина алгебра, тада са новом инволуцијом $\xi^{\flat} := U(-i)\xi^{\#}, \xi \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ је десна Хилбертова алгебра и $\mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})' = \mathfrak{R}_r(\mathfrak{A})$. Штавише, модуларни оператор Δ је затворење оператора $U(-i)$.

Поглавље 5: Укрштени производ - дуалност и тежине

Последње поглавље представља, као што је у наслову рада најављено, примену анализе на локално компактним Абеловим групама у операторским алгебрама - у овом случају фон Нојмановим. Најпре су уведени потребни термини, а затим и доказана дуалност за укрштени производ, чиме је постигнута потпуна веза првог са другим делом рада. На крају је остварена веза са Томита-Такесакијевом теоријом преко тежина на укрштеном производу. Иако се појављује у самом зачећу ове области, тј. у радовима Мареја[20] и фон Нојмана, укрштени производ и данас представља тему која се доста изучава. У наредном тексту, покушаћемо да прикажемо бар део те врло интересантне тематике.

5.1 Тежине на фон Нојмановој алгебри

Поглавље ћемо почети дефиницијом централног појма којим ћемо се бавити у наставку.

Дефиниција 5.1. **Тежина** на фон Нојмановој алгебри $\mathcal{M}$ је пресликавање $\varphi : \mathcal{M}_+ \to [0, +\infty]$ за који важе следећа два својства:
(1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), x, y \in \mathcal{M}_+$;
(2) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x), \lambda \geqslant 0$.
Уколико за свако $x \in \mathcal{M}$ важи да је

$$\varphi(xx^*) = \varphi(x^*x),$$

тада се φ назива **траг**.

Напомена 5.1. Користићемо конвенцију $0 \cdot \infty = 0$.

Дефиниција 5.2. Кажемо да је тежина φ **полуконачна** ако $\mathfrak{p}_\varphi := \{x \in \mathcal{M}_+ | \varphi(x) < \infty\}$ генерише $\mathcal{M}$.

[20] Francis Joseph Murray (1911-1996.), амерички математичар

Дефиниција 5.3. Кажемо да је тежина φ **верна** ако $\mathfrak{p}_\varphi(x) \neq \{0\}$ за сваки ненула $x \in \mathcal{M}_+$.

Дефиниција 5.4. Кажемо да је тежина φ **нормална** ако је $\varphi(\sup_\alpha x_\alpha) = \sup_\alpha \varphi(x_\alpha)$ за сваку ограничену мрежу $\{x_\alpha\}$ у $\mathcal{M}_+$.

Лема 5.1. Нека је $\mathfrak{p}$ произвољан конвексан подконус конуса $\mathcal{M}_+$, тј. скуп за који важи:

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}, \quad \lambda\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}, \lambda > 0;$$

$$\text{и } 0 \leqslant y \leqslant x,\ x \in \mathfrak{p} \Rightarrow y \in \mathfrak{p}.$$

Тада је:

(1) $\mathfrak{n} = \{x \in \mathcal{M} | x^*x \in \mathfrak{p}\}$ леви идеал у $\mathcal{M}$;

(2) $\mathfrak{m} = \{\sum_{i=1}^{n} y_i^* x_i | x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_n \in \mathfrak{n}\}$ $*-$подалгебра алгебре $\mathcal{M}$ таква да је $\mathfrak{m} \cap \mathcal{M}_+ = \mathfrak{p}$, при чему је сваки елемент из $\mathfrak{m}$ линеарна комбинација елемената из $\mathfrak{p}$.

Доказ: (1) Први део је тривијалан. Узмимо произвољан $a \in \mathcal{M}$, $x \in \mathfrak{n}$. Тада важи:

$$(ax)^*ax = x^*a^*ax \leqslant \|a\|^2 x^*x \in \mathfrak{p},$$

јер је $\lambda\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}, \lambda > 0$, па из треће особине подконуса $\mathfrak{p}$, следи $ax \in \mathfrak{n}$. Да бисмо доказали (1), преостаје нам само да приметимо да је $\mathfrak{n}$ адитиван из неједнакости

$$(x+y)^*(x+y) \leqslant 2(x^*x + y^*y),$$

тј. $\mathfrak{n}$ је леви идеал у $\mathcal{M}$.

(2) Да је $\mathfrak{m}$ једна $*-$подалгебра следи из (1). Такође, из поларизационог идентитета

$$4y^*x = \sum_{k=0}^{3} i^k (x + i^k y)^* (x + i^k y),$$

закључујемо да је $\mathfrak{m}$ линеарно генерисан елементима из $\mathfrak{p}$. Нека је сада

$$a = \sum_{j=1}^{n} y_j^* x_j \in \mathfrak{m} \cap \mathcal{M}_+, \quad x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathfrak{n}.$$

Како је $a = a^*$, то из претходног поларизационог идентитета имамо

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(a + a^*) \\ &= \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{3}[i^k(x_j + i^k y_j)^*(x_j + i^k y_j) + (-i)^k(x_j + i^k y_j)^*(x_j + i^k y_j)] \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}[(x_j + y_j)^*(x_j + y_j) - (x_j - y_j)^*(x_j - y_j)]. \end{aligned}$$

Ако са b обележимо $\frac{1}{4}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j + y_j)^*(x_j + y_j)$, тада је он очигледно из $\mathfrak{p}$ и $0 \leqslant a \leqslant b$, па и $a \in \mathfrak{p}$. Обрнут смер је тривијалан, па је тиме тражено доказано. ■

Специјално, нама ће претходна лема требати у случају $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\varphi$. Тада користимо и ознаке:

$$\mathfrak{n}_\varphi := \{x \in \mathcal{M} | \varphi(x^*x) < \infty\};$$

$$\mathfrak{m}_\varphi := \mathfrak{n}_\varphi^*\mathfrak{n}_\varphi = \left\{\sum_i x_i^* y_i | x_i, y_i \in \mathfrak{n}_\varphi\right\}.$$

Фиксирајмо сада тежину φ. Тада је $N_\varphi := \{x \in \mathcal{M} | \varphi(x^*x) = 0\}$ леви идеал у $\mathcal{M}$ садржан у $\mathfrak{n}_\varphi$ па можемо посматрати канонску пројекцију $q_\varphi : \mathfrak{n}_\varphi \to \mathfrak{n}_\varphi / N_\varphi$. Дефинишимо скаларни производ на $q_\varphi(\mathfrak{n}_\varphi)$ као $\langle q_\varphi(x), q_\varphi(y)\rangle := \varphi(y^*x)$. Нека је $\mathfrak{H}_\varphi$ комплетирање простора $q_\varphi(\mathfrak{n}_\varphi)$. Тада дефинишемо репрезентацију $\pi_\varphi : \mathcal{M} \to B(\mathfrak{H}_\varphi)$ природно са $\pi_\varphi(a)q_\varphi(x) = q_\varphi(ax)$. Ови појмови су довољни да искажемо теорему коју ћемо касније користити. На овом месту, неће бити дат њен доказ, али се он може видети у (Tak03).

Теорема 5.2. Пред-Хилбертов простор $\mathfrak{A}_\varphi = q_\varphi(\mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi)$ је густ у $\mathfrak{H}_\varphi$. Притом су инволуција и производ дефинисани са

$$[q_\varphi(x)]^\# = q_\varphi(x^*), \quad q_\varphi(x)q_\varphi(y) = q_\varphi(xy).$$

За $\xi \in \mathfrak{A}_\varphi$, дефинишимо на $\mathfrak{H}_\varphi$ оператор левог множења $\pi_l(\xi)$. Тада скуп свих оператора левог множења генерише $\pi_\varphi(M)$.

5.2 Модуларни услов за тежине

Нека је $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} | 0 \leqslant Im(\lambda) \leqslant 1\}$ и означимо са $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ скуп свих ограничених функција, непрекидних на $\mathbb{D}$ и холоморфних у унутрашњости $\mathbb{D}$.

Дефиниција 5.5. Нека је φ верна, нормална, полуконачна тежина на фон Нојмановој алгебри $\mathcal{M}$ и нека је $\{\alpha_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ једнопараметарска група аутоморфизама на $\mathcal{M}$. Тада φ задовољава **модуларни услов**(он се често назива и **Кубо-Мартин-Швингеров**, или краће **КМС услов**) у односу на α ако важе следећа два својства:
(1) Тежина φ је инваријантна у односу на α у смислу да је $\varphi = \varphi \circ \alpha_t$ за свако $t \in \mathbb{R}$.
(2) За све $x, y \in \mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^*$ постоји $F_{x,y} \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ који задовољава гранични услов за свако $t \in \mathbb{R}$, тј.

$$F_{x,y}(t) = \varphi(\alpha_t(x)y), \qquad F_{x,y}(t+i) = \varphi(y\alpha_t(x)).$$

Важност овог услова исказана је у следећој теореми:

Теорема 5.3. Нека је $\mathcal{M}$ фон Нојманова алгебра и нека је φ верна, нормална, полуконачна тежина на $\mathcal{M}$. Тада је група модуларних аутоморфизама $\{\sigma_t^\varphi\}$, где је $\sigma_t^\varphi(x) = \Delta^{it} x \Delta^{-it}$, јединствена једнопараметарска група аутоморфизама на $\mathcal{M}$ која задовољава модуларни услов у односу на φ.

Доказ ове теореме захтева увођење нових термина, па на овом месту неће бити изложен, али хоће његова једноставна последица која ће се и користити у наставку.

Последица 5.4. Нека је φ верна, нормална, полуконачна тежина на $\mathcal{M}$ и $\theta \in Aut(\mathcal{M})$ произвољан аутоморфизам. Тада је

$$\sigma_t^{\varphi\circ\theta} = \theta^{-1} \circ \sigma_t^\varphi \circ \theta.$$

Доказ: Из σ_t^φ инваријантности (први услов модуларног услова) тежине φ, за сваки $x \in \mathcal{M}^+$ важи

$$\varphi \circ \theta(\theta^{-1} \circ \sigma_t^\varphi \circ \theta(x)) = \varphi \circ \sigma_t^\varphi \circ \theta(x) = \varphi \circ \theta(x),$$

па је $\varphi \circ \theta$, $\theta^{-1} \circ \sigma_t^\varphi \circ \theta$ инваријантна. Ако $x, y \in \mathfrak{n}_{\varphi\circ\theta} = \theta^{-1}\mathfrak{n}_\varphi$ и ако $F_{\theta(x),\theta(y)} \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ задовољава гранични услов (други услов модуларног услова) за

$\theta(x), \theta(y)$ у односу на $\{\sigma^{\varphi}\}$, тада је за све $t \in \mathbb{R}$

$$F_{\theta(x),\theta(y)}(t) = \varphi(\sigma_t^{\varphi}(\theta(x))\theta(y)) = \varphi \circ \theta(\theta^{-1}\sigma_t^{\varphi}(\theta(x))(y)),$$

$$F_{\theta(x),\theta(y)}(t+i) = \varphi(\theta(y)\sigma_t^{\varphi}(\theta(x))) = \varphi \circ \theta(y\theta^{-1}\sigma_t^{\varphi}(\theta(x))),$$

па $F_{\theta(x),\theta(y)}$ задовољава гранични услов за x, y у односу на $\theta^{-1}\sigma^{\varphi}\theta$. Како су задовољена оба модуларна услова, из јединствености (из претходне теореме) закључујемо $\sigma_t^{\varphi\circ\theta} = \theta^{-1} \circ \sigma_t^{\varphi} \circ \theta$. ■

5.3 Конструкција укрштеног производа

Дефиниција 5.6. За дату тополошку групу G, **непрекидно дејство** α групе G на фон Нојманову алгебру $\mathcal{M}$ је хомоморфизам $\alpha : G \ni g \mapsto \alpha_g \in Aut(\mathcal{M})$ такав да је за фиксиран $x \in \mathcal{M}$, пресликавање $G \ni g \mapsto \alpha_g(x) \in \mathcal{M}$ непрекидно у $\sigma-$јакој* топологији. Притом се тројка $\{\mathcal{M}, G, \alpha\}$ назива коваријантни систем.

Пример 5.5. Нека је $\mathcal{M} \subset B(\mathfrak{H})$ фон Нојманова алгебра и нека је U унитарна репрезентација тополошке групе G на $\mathfrak{H}$ таква да је

$$U(g)\mathcal{M}U(g)^* = \mathcal{M}, \quad g \in G.$$

Тада је одређено једно непрекидно дејство G на $\mathcal{M}$ дефинисано са

$$\alpha_g(x) = U(g)xU(g)^*, \quad x \in \mathcal{M}, g \in G.$$

Посматрајмо сада фон Нојманову алгебру $\mathcal{M} \subset B(\mathfrak{H})$ на којој је задато непрекидно дејство α локално компактне групе G. На Хилбертовом простору $L^2(\mathfrak{H}; G)$ (подсетимо се да нам ово означава све L^2-интеграбилне функције из групе G у Хилбертов простор $\mathfrak{H}$) дефинисаћемо две изразито важне репрезентације које ћемо врло често користити у наредном тексту - репрезентацију π_a фон Нојманове алгебре $\mathcal{M}$ и λ, репрезентацију групе G:

$$(\pi_\alpha(x)\xi)(h) = \alpha_h^{-1}(x)\xi(h), \quad x \in \mathcal{M}, h \in G, \xi \in L^2(\mathfrak{H}; G)$$

$$(\lambda(g)\xi)(h) = \xi(g^{-1}h), \quad g \in G, \xi \in L^2(\mathfrak{H}; G).$$

Може се показати да је π_α нормална верна репрезентација. Притом важи:

$$\begin{aligned}(\lambda(g)\pi_\alpha(x)\lambda(g)^*\xi)(h) &= (\pi_\alpha(x)\lambda(g)^*\xi)(g^{-1}h)\\ &= \alpha^{-1}_{g^{-1}h}(x)(\lambda(g)^*\xi)(g^{-1}h)\\ &= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x))\xi(h) = (\pi_\alpha(\alpha_g(x))\xi)(h),\end{aligned}$$

тј.

$$\lambda(g)\pi_\alpha(x)\lambda(g)^* = \pi_\alpha \circ \alpha_g(x), \quad x \in \mathcal{M}, g \in G. \tag{5.1}$$

Уопштено, ако пар $\{\pi_\alpha, \lambda\}$ задовољава једнакост 5.1, он се назива **коваријантна репрезентација** коваријантног система $\{\mathcal{M}, G, \alpha\}$. Дефинишимо сада појам укрштеног производа за фон Нојманове алгебре. Иначе, овај појам постоји и у разним другим облицима, а у самим фон Нојмановим алгебрама је и данас један од врло честих области истраживања.

Дефиниција 5.7. Фон Нојманова алгебра генерисана са $\pi_\alpha(\mathcal{M})$ и $\lambda(G)$ на $L^2(\mathfrak{H}; G)$ се назива **укрштени производ** фон Нојманове алгебре $\mathcal{M}$ и локално компактне групе G у односу на дејство α и означава се са $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$.

Чини се да укрштени производ $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ зависи од Хилбертовог простора $\mathfrak{H}$. Наредни став показује да алгебарска структура укрштеног производа ипак не зависи од $\mathfrak{H}$.

Став 5.6. Нека су $\mathcal{M} \subset B(\mathfrak{H})$ и $\mathcal{N} \subset B(\mathfrak{K})$ две фон Нојманове алгебре на којима постоје непрекидна дејства α и β локално компактне групе G редом. Ако постоји изоморфизам ϕ између $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ тако да важи:

$$\phi \circ \alpha_g = \beta_g \circ \phi, \quad g \in G,$$

тада постоји изоморфизам $\tilde{\phi}$ између $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ и $\mathcal{N} \rtimes_\beta G$ такав да је

$$\pi_\beta \circ \phi(x) = \tilde{\phi} \circ \pi_\alpha(x), x \in \mathcal{M};$$

$$\tilde{\phi}(\lambda_{\mathcal{M}}(g)) = \lambda_{\mathcal{N}}, g \in G,$$

при чему су $\pi_\alpha, \lambda_{\mathcal{M}}, \pi_\beta, \lambda_{\mathcal{N}}$ репрезентације $\mathcal{M}, G, \mathcal{N}, G$ редом, коришћене у конструкцији укрштених производа $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ и $\mathcal{N} \rtimes_\beta G$.

Доказ: Доказ се може пронаћи у (Tak73). ■

5.4 Дуалност за укрштени производ

У овој секцији ћемо показати дуалност за укрштени производ фон Нојманове алгебре са локално компактном Абеловом групом. Овде ће се највише видети примене хармонијске анализе на локално компактним групама. G ће нам означавати локално компактну групу, $\widehat{G}$ њену дуалну групу, dg је фиксирана Харова мера на G, а dp на $\widehat{G}$ такве да важи Планшарелова теорема 3.17.
Нека је $\mathcal{M} \subset B(\mathfrak{H})$ фон Нојманова алгебра са непрекидним дејством α на G. На почетку овог одељка ћемо навести став који нам каже да простор L^2 интеграбилних функција које сликају групу G у Хилбертов простор $\mathfrak{H}$, у ознаци $L^2(\mathfrak{H}; G)$, можемо природно идентификовати са тензорским производом $\mathfrak{H} \otimes L^2(G)$.

Став 5.7. Постоји изоморфизам U простора $\mathfrak{H} \otimes L^2(G)$ и $L^2(\mathfrak{H}; G)$ такав да је

$$(U(\xi_0 \otimes f))(g) = f(g)\xi_0,$$

за све $\xi_0 \in \mathfrak{H}$, $g \in G$ и $f \in C_c(G)$.

Доказ: Доказ се може наћи у (Dae78). ■

Наставићемо ставом који је природан наставак приче о укрштеном производу, а често ћемо га користити у тврђењима која следе.

Став 5.8. Нека је $a : g \mapsto a_g$ јако непрекидна унитарна репрезентација групе G на Хилбертов простор $\mathfrak{H}$, таква да је $\alpha_g(x) = a_g x a_g^*$ за све $x \in \mathcal{M}$ и $g \in G$. Дефинишимо на $L^2(\mathfrak{H}; G)$ унитаран оператор W са $(W\xi)(g) = a_g\xi(g)$ за $\xi \in C_c(\mathfrak{H}; G)$ и $g \in G$. Тада важи:

$$\pi_\alpha(x) = W^*(x \otimes 1)W$$

и

$$\lambda(g) = W^*(a_g \otimes \lambda_g)W.$$

Посебно, укрштени производ $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ је изоморфан фон Нојмановој алгебри у $\mathfrak{H} \otimes L^2(G)$ која је генерисана операторима

$$\{x \otimes 1, a_g \otimes \lambda_g \mid x \in \mathcal{M}, g \in G\}.$$

Доказ: Оператор W је очигледно добро дефинисан и унитаран. Притом је $(W^*\xi)(g) = a_g^*\xi(g)$. Сада за $x \in \mathcal{M}$ дефинишимо оператор $\widetilde{x}$ на $L^2(\mathfrak{H}; G)$

са $(\widetilde{x}\xi)(g) = x\xi(g)$ за $x \in C_c(\mathfrak{H}; G)$. Тада за $\xi = \xi_0 \otimes f$, где $\xi_0 \in \mathfrak{H}$ и $f \in C_c(G)$ важи

$$x\xi(g) = xf(g)\xi_0 = f(g)x\xi_0 = (x\xi_0 \otimes f)(g).$$

Одатле је $\widetilde{x} = x \otimes 1$ и $x \otimes 1$ слика $C_c(\mathfrak{H}; G)$ у самог себе и $((x \otimes 1)\xi)(g) = x\xi(g)$. Тада важи следћи низ једнакости:

$$\begin{aligned}(W^*(x \otimes 1)W\xi)(g) &= a_g^*((x \otimes 1)W\xi)(g) = a_g^* x (W\xi)(g) = a_g^* x a_g \xi(g) \\ &= \alpha_{g^{-1}}(x)\xi(g) = (\pi_\alpha(x)\xi)(g),\end{aligned}$$

па је $\pi_\alpha(x) = W^*(x \otimes 1)W$. Такође је и $((a_g \otimes \lambda_g)\xi)(h) = a_g \xi(g^{-1}h)$, па је

$$\begin{aligned}(W^*(a_g \otimes \lambda_g)W\xi)(h) &= a_h^*((a_g \otimes \lambda_g)W\xi)(h) = a_h^* a_g (W\xi)(g^{-1}h) \\ &= a_{h^{-1}g} a_{g^{-1}h} \xi(g^{-1}h) \\ &= \xi(g^{-1}h) = (\lambda(g)\xi)(h),\end{aligned}$$

тј. $W^*(a_g \otimes \lambda_g)W = \lambda(g)$, што смо и хтели да покажемо. ■

Видећемо у наставку да је доста лакше да радимо са тензорским производом, него са самим репрезентацијама λ и π_α.
Уведимо репрезентацију ν групе $\widehat{G}$ на Хилбертов простор $L^2(G)$. За фиксирано $p \in \widehat{G}$, дефинишимо унитарни оператор ν_p на $L^2(G)$ са:

$$(\nu_p f)(g) = \overline{p(g)} f(g), \quad g \in G, f \in C_c(G).$$

Како је топологија на $\widehat{G}$ топологија компактне конвергенције, то је $p \to \nu_p f$ непрекидно пресликавање за све $f \in C_c(G)$, па је $\nu : \widehat{G} \to U(L^2(G))$ непрекидна репрезентација дуалне групе $\widehat{G}$. Докажимо сада следећу лему.

Лема 5.9. За све $g \in G$ и све $p \in \widehat{G}$ важи $\nu_p \lambda_g \nu_p^* = \overline{p(g)} \lambda_g$.

Доказ: За произвољне $f \in C_c(G)$ и $h \in G$ имамо да важи

$$\begin{aligned}(\nu_p \lambda_g \nu_p^* f)(h) &= \overline{p(h)} (\lambda_g \nu_p^* f)(h) \\ &= \overline{p(h)} (\nu_p^* f)(g^{-1}h) \\ &= \overline{p(h)} p(g^{-1}h) f(g^{-1}h) \\ &= \overline{p(g)} (\lambda_g f)(h),\end{aligned}$$

што је и требало доказати. ■

Лема 5.10. За све $p \in \widehat{G}$ и $x \in \mathcal{M}$, важи $(1 \otimes \nu_p)\pi_\alpha(x)(1 \otimes \nu_p)^* = \pi_\alpha(x)$.

Прооф. За произвољно $\xi \in C_c(\mathfrak{H}; G)$ (уз стандардну идентификацију $L^2(\mathfrak{H}; G) \equiv \mathfrak{H} \otimes L^2(G)$) и $g \in G$ важи $((1 \otimes \nu_p)\xi)(g) = \overline{p(g)}\xi(g)$. Тада је

$$\begin{aligned} ((1 \otimes \nu_p)\pi_\alpha(x)\xi)(g) &= \overline{p(g)}\alpha_{g^{-1}}(x)\xi(g) \\ &= \alpha_{g^{-1}}(x)\overline{p(g)}\xi(g) \\ &= (\pi_\alpha(x)(1 \otimes \nu_g)\xi)(g), \end{aligned}$$

одакле следи тражено тврђење. ■

Дефиниција 5.8. Дефинишимо пресликавање $\widehat{\alpha}_p(\widetilde{x}) = (1 \otimes \nu_p)\widetilde{x}(1 \otimes \nu_p)^*$, при чему $\widetilde{x} \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ и $p \in \widehat{G}$. Како је укрштени производ $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ генерисан са $\pi_\alpha(x), x \in \mathcal{M}$ и $\lambda(g), g \in G$, тада из Лема 5.9 и 5.10 следи да $\widehat{\alpha}_p(\widetilde{x}) \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha G$. Одатле је $\widehat{\alpha}$ непрекидно дејство дуалне групе $\widehat{G}$ на укрстени производ $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$. Дејство $\widehat{\alpha}$ се назива **дуално дејство**.

Слично као у претходном одељку, покажимо неки вид независности дуалног дејства $\widehat{\alpha}$ од дејства α.

Став 5.11. Нека су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ фон Нојманове алгебре и τ изоморфизам, $\tau : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. Нека су α и β непрекидна дејства групе G на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, редом, таква да је $\tau(\alpha_g(x)) = \beta_g(\tau(x))$ за све $g \in G$ и $x \in \mathcal{M}$. Тада је $\widetilde{\tau} = \tau \rtimes 1$ је изоморфизам укрштених производа $\widetilde{\tau} : \mathcal{M} \rtimes_\alpha G \to \mathcal{N} \rtimes_\beta G$ такав да је $\widetilde{\tau}(\widehat{\alpha}_p(\widetilde{x})) = \widehat{\beta}_p(\widetilde{\tau}(\widetilde{x}))$ за све $\widetilde{x} \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ и $p \in \widehat{G}$.

Доказ: По Ставу 5.6, знамо да је $\widetilde{\tau}$ изоморфизам укрштених производа $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ и $\mathcal{N} \rtimes_\beta G$. Пресликвање $\widetilde{\tau}$ је такође дефинисано на $\mathcal{M} \otimes B(L^2(G))$, па има смисла записати

$$\widetilde{\tau}(\widehat{\alpha}_p(\widetilde{x})) = \widetilde{\tau}(1 \otimes \nu_p)\widetilde{\tau}(\widetilde{x})\widetilde{\tau}(1 \otimes \nu_p)^*.$$

Али $\widetilde{\tau}(1 \otimes \nu_p) = (\tau \otimes 1)(1 \otimes \nu_p) = 1 \otimes \nu_p$, па је одатле очигледно

$$\widetilde{\tau}(\widehat{\alpha}_p(\widetilde{x})) = (1 \otimes \nu_p)\widetilde{\tau}(\widetilde{x})(1 \otimes \nu_p)^* = \widehat{\beta}_p(\widetilde{\tau}(\widetilde{x})),$$

што је и требало показати. ■

У даљем тексту ћемо посматрати укрштени производ $(\mathcal{M} \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\widehat{\alpha}} \widehat{G}$, тј. укрштени производ до сада стандардног $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ (који је уједно и фон Нојманова алгебра) и дуалне групе $\widehat{G}$ у односу на дуално дејство $\widehat{\alpha}$. То је фон Нојманова алгебра на Хилбертовом простору $\mathfrak{H} \otimes L^2(G) \otimes L^2(\widehat{G})$. Из Става 5.11 имамо и да је $\tau \otimes 1 \otimes 1$ изоморфизам $(\mathcal{M} \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\widehat{\alpha}} \widehat{G}$ и

$(\mathcal{M} \rtimes_\beta G) \rtimes_{\widehat{\beta}} \widehat{G}$.

Наш следећи циљ, а слободно можемо рећи и највећи циљ овог рада, јер повезује скоро сва претходна знања, јесте да покажемо да је $(\mathcal{M} \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\widehat{\alpha}} \widehat{G}$ изоморфан тензорском производу $\mathcal{M} \otimes B(L^2(G))$. Ово ћемо урадити у неколико корака, у крајњем у ствари показавши да је $(\mathcal{M} \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\widehat{\alpha}} \widehat{G}$ изоморфно $\mathcal{M} \otimes B(L^2(G)) \otimes 1$.

Лема 5.12. Означимо са $\mathcal{M}_0 = (\mathcal{M} \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\widehat{\alpha}} \widehat{G}$ и претпоставимо да је $a : g \mapsto a_g$ непрекидна унитарна репрезентација групе G на Хилбертов простор $\mathfrak{H}$ таква да је $\alpha_g(x) = a_g x a_g^*$ за све $g \in G$ и $x \in \mathcal{M}$. Тада је $\mathcal{M}_0$ изоморфно фон Нојмановој алгебри $\mathcal{M}_1$ у $\mathfrak{H} \otimes L^2(G) \otimes L^2(\widehat{G})$ која је генерисана операторима

$$\{x \otimes 1 \otimes 1, a_g \otimes \lambda_g \otimes 1, 1 \otimes \nu_p \otimes \lambda_p \mid x \in \mathcal{M}, g \in G, p \in \widehat{G}\},$$

при чему је λ_p, сходно претходним ознакама, лева транслација елементом p^{-1} на $L^2(\widehat{G})$.

Доказ: Према Ставу 5.8, $\mathcal{M}_0$ је изоморфна фон Нојмановој алгебри генерисаној са

$$\{\widetilde{x} \otimes 1, 1 \otimes \nu_p \otimes \lambda_p \mid \widetilde{x} \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha G, p \in \widehat{G}\}. \tag{5.2}$$

Сада по истом ставу, $W(\mathcal{M} \rtimes_\alpha G)W^*$ је генерисана са $\{x \otimes 1, a_g \otimes \lambda_g \mid x \in \mathcal{M}, g \in G\}$, где је W дефинисано са $(W\xi)(g) = a_g \xi(g)$, $\xi \in C_c(\mathfrak{H}; G)$. На сличан начин као што смо показали да $\pi_\alpha(x)$ и $1 \otimes \nu_p$ комутирају, може се показати да комутирају и W и $1 \otimes \nu_p$, па деловањем оператором $(W \otimes 1)$ слева, а затим оператором $(W^* \otimes 1)$ здесна на генераторе из 5.2, добијамо тражено тврђење. ■

Лема 5.13. Фон Нојманова алгебра $\mathcal{M}_1$ је изоморфна фон Нојмановој алгебри $\mathcal{M}_2$ у $\mathfrak{H} \otimes L^2(G) \otimes L^2(G)$ генерисаној са

$$\{x \otimes 1 \otimes 1, a_g \otimes \lambda_g \otimes 1, 1 \otimes \nu_p \otimes \nu_p \mid x \in \mathcal{M}, g \in G, p \in \widehat{G}\}.$$

Доказ: Нека је $\mathcal{F} : L^2(\widehat{G}) \to L^2(G)$ унитарни изоморфизам који проширује Фуријеову трансформацију са $L^1(\widehat{G}) \cap L^2(\widehat{G})$ (ово можемо да урадимо по Планшареловој теореми 3.17 и Понтрјагиновој теореми о дуалности

3.22). Тада је за све $f \in C_c(\widehat{G})$

$$(\mathcal{F}f)(g) = \int\limits_{\widehat{G}} \overline{p(g)} f(p) dp.$$

Да бисмо доказали лему, посматрајући претходну, довољно је да докажемо да је $\mathcal{F}\lambda_q\mathcal{F}^* = \nu_q$ за све $q \in \widehat{G}$, јер бисмо множењем слева са $(1 \otimes 1 \otimes \mathcal{F})$, а затим множењем здесна са $(1 \otimes 1 \otimes \mathcal{F}^*)$ оператора који генеришу $\mathcal{M}_1$ добијамо операторе који генеришу $\mathcal{M}_2$. За произвољно $f \in C_c(\widehat{G})$ је тада

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\lambda_q f)(g) &= \int\limits_{\widehat{G}} \overline{p(g)} (\lambda_q f)(p) dp = \int\limits_{\widehat{G}} \overline{p(g)} f(q^{-1}p) dp = \int\limits_{\widehat{G}} \overline{qp(g)} f(p) dp \\ &= \overline{q(g)} \int\limits_{\widehat{G}} \overline{p(g)} f(p) dp = \overline{q(g)} (\mathcal{F}f)(g) = (\nu_q \mathcal{F}f)(g),\end{aligned}$$

одакле множењем са $\mathcal{F}^*$ здесна добијамо тражено. На крају би требало прокоментарисати да смо на почетку излагања морали ν_q дефинисати на $L^2(G)$, а не само на $C_c(G)$ који је свуда густ у њему, јер $\mathcal{F}f$ припада $L^2(G)$, али у општем случају не мора бити у $C_c(G)$. ■

Лема 5.14. Алгебра $\mathcal{M}_2$ је изоморфна фон Нојмановој алгебри $\mathcal{M}_3 \otimes 1$ на простору $\mathfrak{H} \otimes L^2(G) \otimes L^2(G)$, где је $\mathcal{M}_3$ фон Нојманова алгебра у $\mathfrak{H} \otimes L^2(G)$ генерисана операторима

$$\{x \otimes 1, a_g \otimes \lambda_g, 1 \otimes \nu_p \mid x \in \mathcal{M}, g \in G, p \in \widehat{G}\}.$$

Доказ: Најпре приметимо да можемо идентификовати просторе $L^2(G \times G)$ са $L^2(G) \otimes L^2(G)$ на следећи начин: елементу $f \otimes g, f, g \in C_c(G)$ придружимо функцију $(s,t) \mapsto f(s)g(t)$ у $C_c(G \times G)$, а затим како је $C_c(G)$ свуда густ у $L^2(G)$, проширимо изоморфизам до одговарајућих простора.
Сада дефинишимо унитаран оператор U на $L^2(G \times G)$ са $(Uf)(g,h) := f(gh, h)$. Лако се види да U слика $C_c(G \times G)$ у самог себе и да је у питању изометрија.
Посматрајмо сада како $\nu_p \otimes \nu_p$ и $\lambda_r \otimes 1$ делују на $L^2(G \times G)$. Важи

$$((\nu_p \otimes \nu_p) f)(g,h) = \overline{p(g)p(h)} f(g,h)$$

$$\text{и} \qquad ((\lambda_r \otimes 1) f)(g,h) = f(r^{-1}g, h),$$

где $r, g, h \in G$, $p \in \widehat{G}$ и $f \in C_c(G \times G)$. Одатле добијамо да важе следеће једнакости

$$\begin{aligned}(U^*(\nu_p \otimes \nu_p)Uf)(g,h) &= ((\nu_p \otimes \nu_p)Uf)(gh^{-1},h) = \overline{p(gh^{-1})p(h)}(Uf)(gh^{-1},h)\\ &= \overline{p(g)}f(g,h) = ((\nu_p \otimes 1)f)(g,h)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(U^*(\lambda_r \otimes 1)Uf)(g,h) &= ((\lambda_r \otimes 1)Uf)(gh^{-1},h) = (Uf)(r^{-1}gh^{-1},h)\\ &= f(r^{-1}g,h) = ((\lambda_r \otimes 1)f)(g,h).\end{aligned}$$

Дакле, доказали смо да је $U^*(\nu_p \otimes \nu_p)U = \nu_p \otimes 1$ и $U^*(\lambda_r \otimes 1)U = \lambda_r \otimes 1$, па ако делујемо најпре слева са $(1 \otimes U^*)$, а затим здесна са $(1 \otimes U)$ на операторе који генеришу $\mathcal{M}_2$, добијамо операторе који генеришу $\mathcal{M}_3 \otimes 1$. ■

Пре него што дођемо до последњег корака, докажимо једну помоћну лему.

Лема 5.15. Фон Нојманова алгебра генерисана са $\lambda(G) \cup \nu(\widehat{G})$ на $L^2(G)$ је цео простор $B(L^2(G))$.

Доказ: У духу друге главе, означимо истим словом репрезентацију групе $L^1(\widehat{G})$, $\nu : L^1(\widehat{G}) \to B(L^2(G))$ дату са

$$\nu(f) = \int_{\widehat{G}} f(p)\nu_p dp.$$

Тада се фон Нојманова алгебра генерисана са $\nu(\widehat{G})$ поклама са фон Нојмановом алгебром генерисаном са $\nu(L^1(\widehat{G}))$. Приметимо да је тада за $f \in L^1(\widehat{G}), \xi \in L^2(G)$

$$\nu(f)\xi = \int_{\widehat{G}} f(p)\nu_p \xi dp = \int_{\widehat{G}} f(p)\overline{p}\xi dp = \widehat{f}\xi,$$

па је $\nu(f)$ ништа друго до множење са $\widehat{f}$. Како је скуп $\{\widehat{f} \mid L^1(\widehat{G})\}$ густ у $C_0(G)$, а $C_0(G)$ густ у слабој операторској топологији у $L^\infty(G)$, то можемо закључити да је фон Нојманова алгебра генерисана са $\nu(\widehat{G})$ управо $L^\infty(G)$. Како је $L^\infty(G)$ Абелова фон Нојманова алгебра, то је

$$(\lambda(G) \cup \nu(\widehat{G}))' \subseteq L^\infty(G) \cap \lambda(G)'.$$

Али ако $f \in L^\infty(G)$ делује као оператор множења $\tilde{\nu}(f) \in B(L^2(G))$ функцијом f, тада за све $\xi \in L^2(G)$ и $h \in G$

$$(\lambda_g \tilde{\nu}(f)\lambda_g^* \xi)(h) = (\tilde{\nu}(f)\lambda_g^*\xi)(g^{-1}h) = f(g^{-1}h)(\lambda_g^*\xi)(g^{-1}h) = f(g^{-1}h)\xi(h).$$

Ако $\tilde{\nu}(f) \in \lambda(G)'$, тада важи $f(h) = f(g^{-1}h)$ скоро свуда, па f мора бити константа. Одатле је $L^\infty(G) \cap \lambda(G)' = \mathbb{C}$, па је коначно $(\lambda(G) \cup \nu(\widehat{G})) = B(L^2(G))$. ■

Лема 5.16. Алгебра $\mathcal{M}_3$ је изоморфна $\mathcal{M} \otimes B(L^2(G))$.

Доказ: Посматрајмо поново унитарни оператор W дефинисан са

$$(W\xi)(g) = a_g \xi(g), \quad \xi \in C_c(\mathfrak{H}; G).$$

Из става 5.8, знамо да је фон Нојманова алгебра $W(\mathcal{M} \rtimes_\alpha G)W^*$ генерисана са $x \otimes 1$ и $a_g \otimes \lambda_g$, где $x \in \mathcal{M}$ и $g \in G$. Следећи циљ је да покажемо да је $W(\mathcal{M} \otimes L^\infty(G))W^* = \mathcal{M} \otimes L^\infty(G)$.
Најпре, за $x \in \mathcal{M}, \xi \in \mathfrak{H} \otimes L^2(G), g \in G$ важи:

$$\begin{aligned}(W(x \otimes 1)W^*\xi)(g) &= (W^2 \pi_\alpha(x) W^{*2}\xi)(g) = a_g^2(\pi_\alpha(x)W^{*2}\xi)(g)\\ &= a_g^2 \alpha_{g^{-1}}(x)(W^{*2}\xi)(g) = a_g^2\alpha_{g^{-1}}(x)a_g^{*2}\xi(g)\\ &= a_g^2 a_g^* x a_g a_g^{*2}\xi(g) = \alpha_g(x)\xi(g).\end{aligned}$$

Одатле је за $y \in \mathcal{M}'$ и $p \in \widehat{G}$

$$\begin{aligned}[(W(x \otimes 1)W^*)(y \otimes \nu_p)\xi](g) &= \alpha_g(x)[(y \otimes \nu_p)\xi](g) = \alpha_g(x)y\overline{p(g)}\xi(g)\\ &= (y \otimes \nu_p)(\alpha_g(x)\xi)(g) = [(y \otimes \nu_p)(W(x \otimes 1)W^*)\xi](g),\end{aligned}$$

где смо у оба низа једнакости користили већ претходно доказане идентитете (и у другом чињеницу да y комутира са свим из $\mathcal{M}$). Из изведеног можемо закључити да

$$W(x \otimes 1)W^* \in (\mathcal{M}' \otimes L^\infty(G))' = \mathcal{M} \otimes L^\infty(G),$$

где смо користили претходну лему и врло важну чињеницу (коју, додуше, нисмо показали) да је $(M \otimes N)' = M' \otimes N'$. Са друге стране, знамо да је $W^*(x \otimes 1)W = \pi_\alpha(x)$, па је за све $y \in \mathcal{M}', p \in \widehat{G}, \xi \in \mathfrak{H} \otimes L^2(G)$ тачно

$$\begin{aligned}[\pi_\alpha(x)(y \otimes \nu_p)\xi](g) &= \alpha_{g^{-1}}[(y \otimes \nu_p)\xi](g) = \alpha_{g^{-1}}y\overline{p(g)}\xi(g)\\ &= (y \otimes \nu_p)\alpha_{g^{-1}}\xi(g) = [(y \otimes \nu_p)\pi_\alpha(x)\xi](g),\end{aligned}$$

па је $W^*(x \otimes 1)W \in \mathcal{M} \otimes L^\infty(G)$. Коначно, како је $W^*(1 \otimes \nu_p)W = 1 \otimes \nu_p$, добијамо да је

$$W(\mathcal{M} \otimes L^\infty(G))W^* = \mathcal{M} \otimes L^\infty(G).$$

Сада, како је $W^*(a_g \otimes \lambda_g)W = 1 \otimes \lambda_g$, то је $W^*(a_g \otimes \lambda_g)''_{g \in G}W = \mathfrak{C} \otimes \lambda(G)$. Применом претходне леме, добијамо да је

$$W^*\mathcal{M}_3 W = [\mathcal{M} \otimes L^\infty(G) \cup \mathbb{C} \otimes \lambda(G)]'' = \mathcal{M} \otimes B(L^2(G)),$$

што смо и хтели да докажемо. ∎

На крају, комбиновањем лема 5.12-5.16 и Става 5.8, добијамо теорему која је круна ове главе.

Теорема 5.17. **[Теорема о дуалности укрштеног производа]** Укрштени производ $(\mathcal{M} \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \widehat{G}$ је изоморфан тензорском производу $\mathcal{M} \otimes B(L^2(G))$.

5.5 Дуалне тежине

У овом, последњем делу рада, приказаћемо још једну Томитину алгебру, из које ћемо извести једну идентификацију укрштеног производа, а потом и дефинисати тежину на њему, која ће бити, у очигледном смислу, дуална тежини на фон Нојмановој алгебри.

Нека је на фон Нојмановој алгебри дата тежина φ која је нормална, полуконачна и верна. Користећи ознаке са почетка главе, нека је $\mathfrak{H}$ комплетирање $\mathfrak{n}_\varphi$ и η улагање $\mathfrak{n}_\varphi$ у $\mathfrak{H}$. Испоставља се, што је потпуно у складу са теоремом 5.2, као и чињеницама из претходног поглавља да је $\mathfrak{A} = \eta(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}^*)$ пуна лева Хилбертова алгебра таква да је $\mathcal{M} = \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A})$. Ипак, можемо пронаћи и одговарајућу Томитину алгебру $\mathfrak{A}_0$. Њу чини скуп свих аналитичких елемената у $\mathfrak{A}$ у односу на $\{\Delta^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$, тј. слика свих аналитичких елемената у $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}^*$ у односу на σ_t^φ. Подсетимо се да је $\sigma_t^\varphi(x) = \Delta^{it} x \Delta^{-it}, x \in \mathcal{M}, t \in \mathbb{R}$ и природно важи $\Delta^{it}\eta(x) = \eta(\sigma_t^\varphi(x)), x \in \mathfrak{n}$. Дакле, знамо да је $\mathcal{M} = \mathfrak{R}_l(\mathfrak{A}_0)$. Ове чињенице ћемо користити без дубљег залажења у доказе који се, врло детаљно, могу наћи у (Tak03), али са свим ознакама и чињеницама које знамо, делују скроз природно.

Напомена 5.2. У овом делу ћемо користити нотацију где је операција представљена као сабирање, а не као множење. Разлог за ову одлуку је жеља да се прикаже да нотације буквално не мењају ништа, иако се у комутативном случају све чешће користи плус нотација, као што је то и у раду (Tak73).

Дефиниција 5.9. Тежина φ (при том подразумевамо да је у питању верна, полуконачна, нормална тежина) на $\mathcal{M}$ се назива **релативно инваријантном** у односу на дејство α на групи G ако постоји непрекидан позитиван хомоморфизам $\chi : G \to \mathbb{R}_+$ тако да важи:

$$\varphi \circ \alpha_g = \chi(g)\varphi, \quad g \in G.$$

Претпоставимо сада да је φ релативно инваријантна тежина на $\mathcal{M}$. Како су очигледно групе модуларних аутоморфизама придружених φ и $\chi(g)\varphi$ исте, тада група модуларних аутоморфизама $\{\sigma_t^\varphi\}$ комутира са дејством α групе G. То следи из

$$\sigma_t^\varphi = \sigma_t^{\chi(g)\varphi} = \sigma_t^{\varphi\circ\alpha_g} = \alpha_g^{-1} \circ \sigma_t^\varphi \circ \alpha_g, \quad g \in G,$$

при чему последња једнакост следи из последице 5.4 примењене на $\theta = \alpha_g$.
Сада ћемо за свако $g \in G$ дефинисати операторе $T(g)$ и $U(g)$ на $\mathfrak{n}_\varphi$ са:

$$T(g)\eta(x) = \eta \circ \alpha_g(x);$$

$$U(g)\eta(x) = \chi(g)^{-\frac{1}{2}}\eta \circ \alpha_g(x), \quad x \in \mathfrak{n}_\varphi.$$

Операторе $T(g)$ и $U(g)$ затим проширимо до ограничених оператора на $\mathfrak{H}$ при чему ћемо задржати исту нотацију.
Приметимо да су пресликавања $U : G \ni g \mapsto U(g)$ и $T : G \ni g \mapsto T(g)$ непрекидне репрезентације G на $\mathfrak{H}$ и притом је U унитарна.
Из малопре доказане комутативности $\{\sigma_t^\varphi\}$ и дејства групе G α имамо да је

$$T(g)\Delta^{it} = \Delta^{it}T(g);$$

$$U(g)\Delta^{it} = \Delta^{it}U(g), \quad g \in G, t \in \mathbb{R},$$

што ћемо користи у пар наредних доказа.
Штавише, с обзиром да је алгебарски $^*-$аутоморфизам на $\mathfrak{A}$, $T(g)$ комутира са оператором S дефинисаним у четвртом поглављу, па тиме и са унитарном инволуцијом J на $\mathfrak{H}$ (подсетимо се да је $J = \Delta^{\frac{1}{2}}S$) па важе још две особине које ћемо такође користити у доказима:

$$T(g)J = JT(g);$$

$$U(g)J = JU(g), \quad g \in G.$$

Одатле, $T(g)$, а самим тим и $U(g)$ остављају Томитину алгебру $\mathfrak{A}_0$ инваријантном.

Током овог поглавља ћемо се бавити простором непрекидних функција из локално компактне Абелове групе G у Томитину алгебру $\mathfrak{A}_0$ са компактним носачем и означаваћемо га са $C_c(\mathfrak{A}_0; G)$. Томитину алгебру $\mathfrak{A}_0$ снабдећемо локално конвексном топологијом индукованом фамилијом семинорми на $\mathfrak{A}_0$ $\{p_K | K$ пролази све компактне подскупове $\mathbb{C}\}$ дефинисаном са:

$$p_K(\xi) = \sup_{\omega \in K} \{\|\Delta^\omega \xi\| + \|\pi_l(\Delta^\omega \xi)\| + \|\pi_r(\Delta^\omega \xi)\|\}, \quad \xi \in \mathfrak{A}_0.$$

На $C_c(\mathfrak{A}_0; G)$ дефинишемо скаларни производ на следећи начин:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_G \langle \xi(g), \eta(g) \rangle dg, \quad \xi, \eta \in C_c(\mathfrak{A}_0; G).$$

Приметимо да комплетирање $C_c(\mathfrak{A}_0; G)$ није ништа друго него $L^2(\mathfrak{H}; G)$ (користићемо нотацију где први простор означава кодомен, а други домен). У наредном тексту ћемо се бавити алгебарском структуром на $C_c(\mathfrak{A}_0, G)$ коју дефинишемо помоћу:

$$(\xi\eta)(g) = \int_G (T(-h)\xi(g-h))\eta(h)dh;$$

$$\xi^\#(g) = T(-g)\xi(-g)^\#;$$

$$[\tilde{\Delta}(\omega)\xi](g) = \chi(g)^\omega \Delta^\omega \xi(g), \omega \in \mathbb{C}.$$

Сада очигледно важи

$$\tilde{\Delta}(\omega) C_c(\mathfrak{A}_0; G) = C_c(\mathfrak{A}_0; G), \omega \in \mathbb{C};$$

$$C_c(\mathfrak{A}_0; G)^\# = C_c(\mathfrak{A}_0; G).$$

Затвореност множења при управо дефинисаним операцијама у $C_c(\mathfrak{A}_0; G)$ доказује следећа лема:

Лема 5.18. Ако су $\xi, \eta \in C_c(\mathfrak{A}_0; G)$, тада је и производ $\xi\eta \in C_c(\mathfrak{A}_0; G)$

Доказ: Дефинишимо $\xi_\omega(g) := \Delta^\omega \xi(g)$ и $\eta_\omega(g) := \Delta^\omega \eta(g)$, где $\omega \in \mathbb{C}, g \in G$.

Тада је

$$
\begin{aligned}
(\xi_\omega\eta_\omega)(g) &= \int\limits_G [T(-h)\Delta^\omega\xi(g-h)][\Delta^\omega\eta(h)]dh \\
&= \int\limits_G [\Delta^\omega T(-h)\xi(g-h)][\Delta^\omega\eta(h)]dh \\
&= \int\limits_G \Delta^\omega[(T(-h)\xi(g-h))\eta(h)]dh \\
&= \Delta^\omega \int\limits_G [T(-h)\xi(g-h)]\eta(h)dh = \Delta^\omega(\xi\eta(g)),
\end{aligned}
$$

при чему претпоследња једнакост важи из затворивости оператора Δ^ω. Одатле $\xi\eta(g) \in \mathfrak{D}(\Delta^\omega)$ за све $g \in G$.
Сада за сваки компактан скуп $K \subset \mathbb{C}$ (често ћемо прескакати образложења која се тичу основне дефиниције локално компактог скупа G), означимо са:

$$
\gamma_K(g) := \sup_{\omega\in K} \int\limits_G \|\pi_l(\xi_\omega(g-h))\|\|\pi_l(\eta_\omega(h))\|dh.
$$

Тада за све $\zeta \in \mathfrak{A}_0$ и $\omega \in K$,

$$
\begin{aligned}
\pi_r(\zeta)((\xi_\omega\eta_\omega)(g)) &= \pi_r(\zeta)\int\limits_G [T(-h)\xi_\omega(g-h)]\eta_\omega(h)dh \\
&= \int\limits_G \pi_r(\zeta)[T(-h)\xi_\omega(g-h)]\eta_\omega(h)dh \\
&= \int\limits_G \pi_l(T(-h)\xi_\omega(g-h))\pi_l(\eta_\omega(h))\zeta dh \\
&= \left[\int\limits_G \alpha_h^{-1}\circ\pi_l(\xi_\omega(g-h))\pi_l(\eta_\omega(h))dh\right]\zeta,
\end{aligned}
$$

па је (користимо и претходни рачун)

$$
\|\pi_r(\Delta^\omega\xi\eta(g))\| \leqslant \gamma_K(g)\|\zeta\|.
$$

Одавде је $\Delta^\omega\xi\eta(g)$ ограничен слева за свако $\omega \in \mathbb{C}$. Тиме смо показали да $\xi\eta(g) \in \mathfrak{A}_0$ за свако $g \in G$.
Сада нам је преостало да покажемо да $\xi\eta$ непрекидна функција са

компактним носачем. Да има компактан носач је тривијално и следи из својства конволуције. Докажимо да је функција $G \ni g \mapsto \xi\eta(g) \in \mathfrak{A}_0$ непрекидна. Узмимо произвољне $g, g_0 \in G$. Тада је

$$\begin{aligned}
\sup_{\omega\in K}\|\Delta^{\omega}(\xi\eta(g)-\xi\eta(g_0))\| &= \sup_{\omega\in K}\|\xi_{\omega}\eta_{\omega}(g)-\xi_{\omega}\eta_{\omega}(g_0)\| \\
&= \sup_{\omega\in K}\|\int_G [T(-h)\Delta^{\omega}(\xi(g-h)-\xi(g_0-h))][\Delta^{\omega}\eta(h)]dh\| \\
&\leqslant \sup_{\omega\in K}\int_G \|\pi_l(\Delta^{\omega}(\xi(g-h)-\xi(g_0-h)))\|\|\Delta^{\omega}\eta(h)\|dh \\
&\leqslant \int_G p_K(\xi(g-h)-\xi(g_0-h))p_K(\eta(h))dh,
\end{aligned}$$

а последњи израз тежи 0 када $g \to g_0$. Слично се покаже да и преостала два израза која учествују у дефиницији p_K теже ка 0 када $g \to g_0$, тј.

$$\lim_{g\to g_0}\sup_{\omega\in K}\|\pi_l(\Delta^{\omega}\xi\eta(g))-\pi_l(\Delta^{\omega}\xi\eta(g_0))\| = 0;$$

$$\lim_{g\to g_0}\sup_{\omega\in K}\|\pi_r(\Delta^{\omega}\xi\eta(g))-\pi_r(\Delta^{\omega}\xi\eta(g_0))\| = 0,$$

чиме смо показали да је тражена функција непрекидна, а тиме и доказали да је $C_c(\mathfrak{A}_0; G)$ затворен за производ. ■

Лема 5.19. За све $\xi, \eta, \zeta \in C_c(\mathfrak{A}_0; G)$ важи $(\xi\eta)\zeta = \xi(\eta\zeta)$, као и $\langle \xi\eta, \zeta\rangle = \langle \eta, \xi^{\#}\zeta\rangle$.

Доказ: Доказ следи применом Фубинијеве теореме. ■

Овим смо показали да је $C_c(\mathfrak{A}_0; G)$ инволутивна алгебра над $\mathbb{C}$.

Лема 5.20. За фиксиран $\xi \in C_c(\mathfrak{A}_0; G)$, оператор левог множења $\pi_l(\xi) : C_c(\mathfrak{A}_0; G) \ni \eta \mapsto \xi\eta \in C_c(\mathfrak{A}_0; G)$ је ограничен.

Доказ: За произвољно $\eta \in C_c(\mathfrak{A}_0;G)$ важи:

$$\begin{aligned}
|\langle \xi\eta, \zeta\rangle| =& \Big|\int_G \langle \int_G (T(-h)\xi(g-h))\eta(h)dh, \zeta(g)\rangle dg\Big| \\
\leqslant& \iint_{G\times G} |\langle (T(-h)\xi(g-h))\eta(h), \zeta(g)\rangle| dgdh \\
\leqslant& \iint_{G\times G} \|(T(-h)\xi(g-h))\eta(h)\|\|\zeta(g)\| dgdh \\
\leqslant& \iint_{G\times G} \|\pi_l(\xi(g-h))\|\|\eta(h)\|\|\zeta(g)\| dgdh \\
=& \iint_{G\times G} \|\pi_l(\xi(g))\|\|\eta(h)\|\|\zeta(g+h)\| dgdh \\
\leqslant& \int_G \|\pi_l(\xi(g))\| \Big[\Big(\int_G \|\eta(h)\|^2 dh\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_G \|\zeta(g+h)\|^2 dh\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] dg \\
=& \|\eta\|\|\zeta\| \int_G \|\pi_l(\xi(g)\| dg,
\end{aligned}$$

при чему смо у четвртом реду употребили смену $g \leftrightarrow g+h$ и користили транслаторну инваријантност Харове мере, док смо у наредном реду искористили Коши-Шварцову неједнакост. Из изведеног рачуна, имамо да је

$$\|\xi\eta\| = \sup_{\|\zeta\|\leqslant 1} |\langle \xi\eta, \zeta\rangle| \leqslant \|\eta\| \int_G \|\pi_l(\xi(g)\| dg,$$

чиме смо показали да је $\pi_l(\xi)$ ограничен оператор. ■

Лема 5.21. За произвољну функцију $f \in C_c(G)$ и за све $\xi \in L^2(\mathfrak{H};G)$, нека је

$$(f * \xi)(g) = \int_G f(g-h)\xi(h)dh.$$

Тада важе следећа три тврђења:

(1) $f * \xi$ је $\mathfrak{H}$-вредносна L^2 интеграбилна непрекидна функција на G;

(2) За све $\xi \in C_c(\mathfrak{A}_0;G)$, $f * \xi \in C_c(\mathfrak{A}_0;G)$;

(3) За све $\xi, \eta \in C_c(\mathfrak{A}_0;G)$

$$(f * \xi) * \eta = f * (\xi\eta), \quad \langle f * \xi, \eta\rangle = \langle \xi, f^* * \eta\rangle,$$

где је f^* дефинисано на стандардан начин $f^*(g) = \overline{f(-g)}$.

Доказ: Нека је $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ у $C_c(\mathfrak{A}_0;G)$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty}\|\xi-\xi_n\|=0$. Тада је:

$$\begin{aligned}\|f*\xi(g)-f*\xi_n(g)\| &\leqslant \int\limits_G |f(g-h)|\|\xi(h)-\xi_n(h)\|dh\\ &\leqslant \Big(\int\limits_G |f(g-h)|^2dh\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_G \|\xi(h)-\xi_n(h)\|^2dh\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &= \Big(\int\limits_G |f(h)|^2dh\Big)^{\frac{1}{2}}\|\xi-\xi_n\|\to 0,\end{aligned}$$

где друга неједнакост следи из Коши-Шварцове неједнакости, а последња једнакост из транслаторне инваријантности.
Одатле је $f*\xi$ униформни лимес $\{f*\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, па како су оне непрекидне, то је и $f*\xi$ непрекидна. L^2 интеграбилност $f*\xi$ добијамо на основу сличног разматрања као у претходној Леми. Такође, (2) је очигледно, а (3) је очекивано директна примена Фубинијеве теореме. ■

Лема 5.22. Скуп свих производа $\xi\eta$, при чему су $\xi,\eta\in C_c(\mathfrak{A}_0;G)$, је свуда густ у $L^2(\mathfrak{H};G)$.

Доказ: Узмимо произвољан елемент $\zeta\in L^2(\mathfrak{H};G)$ ортогоналан на све $\xi\eta,\xi,\eta\in C_c(\mathfrak{A}_0;G)$. То значи да је

$$\int\limits_G\langle\xi\eta(g),\zeta(g)\rangle dg=0,\xi,\eta\in C_c(\mathfrak{A}_0;G).$$

Сада по претходној Леми имамо да је за све $f\in C_c(G)$

$$\langle\xi\eta,f*\zeta\rangle=\langle(f^**\xi)\eta,\zeta\rangle=0.$$

Узмимо сада произвољне $f_1,f_2\in C_c(G)$. Како функције $g\in G\mapsto f_1(g)\xi(g)=(f_1\xi)(g)$ и $g\in G\mapsto f_2(g)\eta(g)=(f_2\eta)(g)$ припадају $C_c(\mathfrak{A}_0;G)$, када $\xi\eta\in C_c(\mathfrak{A}_0;G)$, то је

$$\begin{aligned}0=\langle(f_1\xi)(f_2\eta),f*\zeta\rangle &= \int\limits_G\langle(f_1\xi)(f_2\eta)(g),(f*\zeta)(g)\rangle dg\\ &= \iint\limits_{G\times G} f_1(g-h)f_2(h)\langle(T(-h)\xi(g-h))\eta(h),(f*\zeta)(g)\rangle dgdh\\ &= \iint\limits_{G\times G} f_1(g)f_2(h)\langle(T(-h)\xi(g))\eta(h),(f*\zeta)(g+h)\rangle dgdh.\end{aligned}$$

Како смо f_1 и f_2 бирали произвољно и како је функција

$$G \times G \ni (g,h) \mapsto \langle (T(-h)\xi(g))\eta(h), (f * \zeta)(g+h)\rangle \in \mathbb{C}$$

непрекидна, то је

$$\langle (T(-h)\xi(g))\eta(h), (f * \zeta)(g+h)\rangle = 0, \forall g, h \in G.$$

Посебно, за $h = 0$ добијамо $\langle \xi(g)\eta(0), f * \zeta(g)\rangle = 0$ за све $g \in G$. Како се вредности елемената из $C_c(\mathfrak{A}_0; G)$ анулирају у фиксираној тачки на целом $\mathfrak{A}_0$, то је $\langle \xi\eta, f * \zeta(g)\rangle = 0$ за све $\xi, \eta \in \mathfrak{A}_0$ и $g \in G$, па је $f * \zeta(g) = 0$ за све $g \in G$. Сада за сваку компактну околину K у G одаберемо $f_K \in C_c(G)$ тако да је $\int\limits_G f_K(g)dg = 1$. Тада мрежа $\{f_K * \zeta\}$ конвергира у норми ка ζ. Тиме је

$$\zeta = \lim f_K * \zeta = 0,$$

чиме је доказ завршен. ∎

Лема 5.23. За све $\omega \in \mathbb{C}$ и $\xi, \eta \in C_c(\mathfrak{A}_0; G)$ важи:

$$\tilde{\Delta}(\omega)(\xi\eta) = (\tilde{\Delta}(\omega)\xi)(\tilde{\Delta}(\omega)\eta);$$

$$(\tilde{\Delta}(\omega)\xi)^{\#} = \tilde{\Delta}(-\overline{\omega})\xi^{\#}.$$

Доказ: Прво тврђење следи из следећег низа једнакости:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\Delta}(\omega)\xi)(\tilde{\Delta}(\omega)\eta)(g) &= \int\limits_G (T(-h)(\tilde{\Delta}(\omega)\xi)(g-h))(\tilde{\Delta}(\omega)\eta)(h)dh \\
&= \int\limits_G \chi(g-h)^{\omega}(T(-h)\Delta^{\omega}\xi(g-h))(\chi(h)^{\omega}\Delta^{\omega}\eta(h))dh \\
&= \chi(g)^{\omega}\int\limits_G \Delta^{\omega}((T(-h)\xi(g-h))\eta(h))dh \\
&= \chi(g)^{\omega}\Delta^{\omega}\int\limits_G (T(-h)\xi(g-h))\eta(h)dh \\
&= \tilde{\Delta}(\omega)(\xi\eta)(g).
\end{aligned}$$

Други део тврђења је доказан опет чисто рачунски:

$$\begin{aligned}(\tilde{\Delta}(\omega)\xi)^{\#}(g) &= T(-g)(\tilde{\Delta}(\omega)\xi)(-g)^{\#}\\ &= T(-g)(\chi(g)^{-\omega}\Delta^{\omega}\xi(-g))^{\#}\\ &= T(-g)\chi(g)^{-\overline{\omega}}\Delta^{-\overline{\omega}}\xi(-g)^{\#}\\ &= \chi(g)^{-\overline{\omega}}\Delta^{-\overline{\omega}}T(-g)\xi(-g)^{\#}\\ &= (\tilde{\Delta}(-\overline{\omega})\xi^{\#})(g),\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. ∎

Лема 5.24. За све $\xi, \eta \in C_c(\mathfrak{A}; G)$ важи

$$\langle \tilde{\Delta}(1)\xi, \eta\rangle = \langle \eta^{\#}, \xi^{\#}\rangle.$$

Доказ: Доказ овог тврђења је потпуно рачунски и показан је следећим једнакостима

$$\begin{aligned}\langle \eta^{\#}, \xi^{\#}\rangle &= \int_G \langle T(-g)\eta(-g)^{\#}, T(-g)\xi(-g)^{\#}\rangle dg\\ &= \int_G \langle \chi(g)^{-\frac{1}{2}}U(-g)\eta(-g)^{\#}, \chi(g)^{-\frac{1}{2}}U(-g)\xi(-g)^{\#}\rangle dg\\ &= \int_G \chi(g)^{-1}\langle U(-g)\eta(-g)^{\#}, U(-g)\xi(-g)^{\#}\rangle dg\\ &= \int_G \chi(g)^{-1}\langle \eta(-g)^{\#}, \xi(-g)^{\#}\rangle dg\\ &= \int_G \chi(g)^{-1}\langle \Delta\xi(-g), \eta(-g)\rangle dg\\ &= \int_G \chi(g)\langle \Delta\xi(g), \eta(g)\rangle dg = \langle \tilde{\Delta}(1)\xi, \eta\rangle\end{aligned}$$

∎

Сада, с обзиром на очигледну чињеницу да је функција

$$\mathbb{C} \ni \omega \mapsto \langle \widetilde{\Delta}(\omega)\xi, \eta\rangle = \int_G \langle \xi(g)^{\omega}\Delta^{\omega}\xi(g), \eta(g)\rangle dg,$$

цела за све $\xi\eta \in C_c(\mathfrak{A}_0; G)$, као и на основу целокупног претходног излагања закључујемо:

Теорема 5.25. Алгебра са инволуцијом $C_c(\mathfrak{A}_0;G)$ је једна Томитина алгебра.

Опишимо и одговарајућу инволуцију $\tilde{J}$.

Лема 5.26. Придружена унитарна инволуција $\tilde{J}$ на $L^2(\mathfrak{H};G)$ је дата са

$$\tilde{J}\xi(g) := U(-g)J\xi(-g) = JU(-g)\xi(-g), \quad \xi \in L^2(\mathfrak{H};G).$$

Доказ: За произвољан $\xi \in C_c(\mathfrak{A}_0;G)$ рачунамо

$$\begin{aligned}(\tilde{J}\xi)(g) = (\tilde{\Delta}(\frac{1}{2})\xi^{\#})(g) = \chi(g)^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}\xi^{\#}(g) &= \chi(g)^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}T(-g)\xi(-g)^{\#} \\ &= U(-g)\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}J\xi(-g) \\ &= U(-g)J\xi(-g) = JU(-g)\xi(-g),\end{aligned}$$

што је и требало доказати. ■

Најважнији резултат овог одељка, поред чињенице да је $C_c(\mathfrak{A}_0;G)$ Томитина алгебра јесте наредна теорема.

Теорема 5.27. Лева фон Нојманова алгебра $\mathfrak{R}_l(C_c(\mathfrak{A}_0;G))$ Томитине алгебре $C_c(\mathfrak{A}_0;G)$ поклапа се са укрштеним производом $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$.

Доказ: Нека је ξ произвољан елемент из $C_c(\mathfrak{A}_0;G)$. За сваки $g \in G$, нека је

$$x(g) = \alpha_g \pi_l(\xi(g)) \in \mathcal{M};$$

$$x = \int_G \pi_\alpha(x(g))\lambda(g)dg \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha G.$$

Тада за произвољне $\eta, \zeta \in C_c(\mathfrak{A}_0; G)$ имамо

$$\begin{aligned}
\langle x\eta, \zeta\rangle &= \int\limits_G \langle \pi_\alpha(x(g))\lambda(g)\eta, \zeta\rangle dg \\
&= \iint\limits_{G\times G} \langle \alpha_h^{-1}(x(g))\eta(h-g), \zeta(h)\rangle dhdg \\
&= \iint\limits_{G\times G} \langle \alpha_{h-g}^{-1} \circ \pi_l(\xi(g))\eta(h-g), \zeta(h)\rangle dhdg \\
&= \iint\limits_{G\times G} \langle [T(g-h)\xi(g)]\eta(h-g), \zeta(h)\rangle dhdg \\
&= \iint\limits_{G\times G} \langle [T(-g)\xi(h-g)]\eta(g), \zeta(h)\rangle dhdg \\
&= \langle \xi\eta, \zeta\rangle = \langle \pi_l(\xi)\eta, \zeta\rangle.
\end{aligned}$$

Одавде је $\pi_l(\xi) = x$, па самим тим $\pi_l(\xi) \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha G$, а како смо ξ бирали произвољно, то важи $\mathfrak{R}_l(C_c(\mathfrak{A}_0; G)) \subset \mathcal{M} \rtimes_\alpha G$.
Докажимо сада и обратан смер. Стратегија коју ћемо је користити је следећа: доказаћемо да $\pi_\alpha(x), x \in \mathcal{M}$ и $\lambda(g), g \in G$ комутирају са десном фон Нојмановом алгебром Томитине алгебре $C_c(\mathfrak{A}_0; G)$, одакле ће припадати левој фон Нојмановој алгебри, што би доказало супротан смер. Нека је $x = \pi_l(\xi_0) \in \mathcal{M}$ (ово знамо по дефиницији Томитине алгебре $\mathfrak{A}_0$), при чему је $\xi_0 \in \mathfrak{A}_0$ произвољан. За произвољан $\eta \in C_c(\mathfrak{A}_0; G)$, функција

$$G \ni g \mapsto (\pi_\alpha(x)\eta)(g) = \alpha_g^{-1}(x)\eta(g) = (T(-g)\xi_0)\eta(g) \in \mathfrak{A}_0$$

је непрекидна у односу на локално конвексну топологију на $\mathfrak{A}_0$ коју смо дефинисали и има компактан носач (просто, η је таква), па

$\pi_\alpha(x)\eta \in C_c(\mathfrak{A}_0; G)$. За произвољан $\zeta \in C_c(\mathfrak{A}_0; G)$ важи:

$$
\begin{aligned}
(\pi_r(\zeta)\pi_\alpha(x)\eta)(g) &= ((\pi_\alpha(x)\eta)\zeta)(g) \\
&= \int_G [T(-h)(\pi_\alpha(x)\eta)(g-h)]\zeta(h)dh \\
&= \int_G [T(-h)([T(h-g)\xi_0]\eta(g-h)]\zeta(h)dh \\
&= \int_G (T(-g)\xi_0)(T(-h)\eta(g-h))\zeta(h)dh \\
&= \alpha_g^{-1}(x)\int_G (T(-h)\eta(g-h))\zeta(h)dh \\
&= (\pi_\alpha(x)(\eta\zeta))(g) = (\pi_\alpha(x)\pi_r(\zeta)\eta)(g),
\end{aligned}
$$

при чему смо користили особине из претходно изведеног израза за $\pi_\alpha(x)\eta$. Добили смо да $\pi_\alpha(x)$ комутира са $\pi_r(\xi), \xi \in C_c(\mathfrak{A}_0; G)$, па комутира и са десном фон Нојмановом алгебром $\mathfrak{R}_r(C_c(\mathfrak{A}_0; G))$, па самим тим припада $\mathfrak{R}_l(C_c(\mathfrak{A}_0; G))$. Како $\pi_l(\mathfrak{A}_0)$ генерише $\mathcal{M}$ (поново користимо својство Томитине алгебре $\mathfrak{A}_0$), то је $\pi_\alpha(M)$ садржано у $\mathfrak{R}_l(C_c(\mathfrak{A}_0; G))$.
Што се тиче $\lambda(G)$, принцип је исти. Узмимо произвољан $g \in G$ и произвољне $\xi, \eta \in C_c(\mathfrak{A}_0; G)$. Тада је

$$
\begin{aligned}
(\lambda(g)\pi_r(\eta)\xi)(h) &= (\pi_r(\eta)\xi)(h-g) = (\xi\eta)(h-g) \\
&= \int_G [T(-s)\xi(h-g-k)]\eta(s)ds \\
&= \int_G [T(-s)(\lambda(g)\xi)(h-k)]\eta(s)ds \\
&= ((\lambda(g)\xi)\eta)(h) = (\pi_r(\eta)\lambda(g)\xi)(h),
\end{aligned}
$$

где смо користили само основне дефиниције оператора. Тиме смо показали да $\lambda(g)$ и $\pi_r(\eta)$ комутирају, па тиме и $\lambda(g) \in \mathfrak{R}_l(C_c(\mathfrak{A}_0; G))$. Како $\mathfrak{R}_l(C_c(\mathfrak{A}_0; G))$ садржи генераторе фон Нојманове алгебре $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$, $\lambda(G)$ и $\pi_\alpha(\mathcal{M})$, то важи $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G \subset \mathfrak{R}_l(C_c(\mathfrak{A}_0; G))$, чиме смо коначно доказали тражено, тј. да је

$$\mathcal{M} \rtimes_\alpha G = \mathfrak{R}_l(C_c(\mathfrak{A}_0; G)).$$

■

Последица 5.28. Фон Нојманова алгебра $(\mathcal{M} \rtimes_\alpha G)'$(комутант укрштеног производа) је генерисана операторима $\pi'(y), y \in \mathcal{M}'$ и $\lambda'_\alpha(g), g \in G$ који су дефинисани на следећи начин:

$$(\pi'(y)\xi)(h) := y\xi(h);$$

$$(\lambda'_\alpha(g)\xi)(h) := U(g)\xi(h+g), \quad \xi \in L^2(\mathfrak{H}; G), h \in G.$$

Доказ: Према претходној Теореми и крајњем резултату претходне главе (Теореми 4.21) знамо да је

$$\tilde{J}(\mathcal{M} \rtimes_\alpha G)\tilde{J} = (\mathcal{M} \rtimes_\alpha G)'.$$

Одатле је $(\mathcal{M} \rtimes_\alpha G)'$ генерисан са $\tilde{J}\pi_\alpha(\mathcal{M})\tilde{J}$ и $\tilde{J}\lambda(G)\tilde{J}$. Тада је по малопре изведеној дефиницији оператора $\tilde{J}$, за произвољно $x \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}(\tilde{J}\pi_\alpha(x)\tilde{J}\xi)(g) &= JU(-g)(\pi_\alpha(x)\tilde{J}\xi)(-g)\\ &= JU(-g)\alpha_g^{-1}(x)(\tilde{J}\xi)(-g)\\ &= JU(-g)\alpha_g^{-1}(x)U(g)J\xi(g)\\ &= JxJ\xi(g) = (\pi'(y)\xi)(g),\end{aligned}$$

где је $y = JxJ \in \mathcal{M}'$ (поново према резултатима из претходне главе).
За други део имамо

$$\begin{aligned}(\tilde{J}\lambda(g)\tilde{J}\xi)(h) &= JU(-h)(\lambda(g)\tilde{J}\xi)(-h)\\ &= JU(-h)(\tilde{J}\xi)(-h-g)\\ &= JU(-h)U(h+g)J\xi(h+g)\\ &= U(g)\xi(h+g) = (\lambda'_\alpha(g)\xi)(h),\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. ■

Сада можемо на природан начин дефинисати тежину $\tilde{\varphi}$ на $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$.

Дефиниција 5.10. Канонска тежина $\tilde{\varphi}$ на $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ придружена Томитиној алгебри $C_c(\mathfrak{A}_0; G)$ назива се **дуална тежина** у односу на тежину φ на $\mathcal{M}$. Дуална тежина $\tilde{\varphi}$ дата је формулом

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \|\xi\|^2, \text{ако је } x = \pi_l(\xi)^*\pi_l(\xi), & \xi \in \tilde{\mathfrak{A}},\\ +\infty, \text{иначе} \end{cases},$$

где је $\tilde{\mathfrak{A}}$ пуна лева Хилбертова алгебра $(C_c(\mathfrak{A}_0; G))''$.

Нека је $\tilde{\Delta}$ модуларни оператор на $L^2(\mathfrak{H};G)$ придружен $C_c(\mathfrak{A}_0;G)$. Такође, означимо са $\{\sigma_t^{\tilde{\varphi}}\}$ модуларну групу аутоморфизама на $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ придружену дуалној тежини $\tilde{\varphi}$. Тада важи следећи став:

Став 5.29. Модуларна група аутоморфизама $\{\sigma_t^{\tilde{\varphi}}\}$ делује на $\pi_\alpha(\mathcal{M})$ и $\lambda(G)$ (чиме описујемо дејство и на укрштеном производу) на следећи начин:

$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}} \circ \pi_\alpha(x) = \pi_\alpha \circ \sigma_t^{\varphi}(x) \quad x \in \mathcal{M};$$

$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(\lambda(g)) = \chi(g)^{it}\lambda(g), \quad g \in G, t \in R.$$

Доказ: Подсетимо се да је $(\tilde{\Delta}^{it}\xi)(g) = \chi(g)^{it}\Delta^{it}\xi(g)$, за $\xi \in L^2(\mathfrak{H};G)$. Тада је:

$$\begin{aligned}
(\sigma_t^{\tilde{\varphi}} \circ \pi_\alpha(x)\xi)(g) &= (\tilde{\Delta})^{it}\pi_\alpha(x)(\tilde{\Delta})^{-it}\xi)(g) \\
&= \chi(g)^{it}\Delta^{it}(\pi_\alpha(x)\chi(g)^{-t}\Delta^{-it}\xi)(g) \\
&= \chi(g)^{it}\Delta^{it}\alpha_g^{-1}(x)\chi(g)^{-t}\Delta^{-it}\xi(g) \\
&= \sigma_t^{\varphi} \circ \alpha_g^{-1}(x)\xi(g) \\
&= \alpha_g^{-1} \circ \sigma_t^{\varphi}(x)\xi(g) = (\pi_\alpha \circ \sigma_t^{\varphi}(x)\xi)(g),
\end{aligned}$$

чиме је доказан први део тврђења.
Други део опет следи из једноставног рачуна:

$$\begin{aligned}
(\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(\lambda(g))\xi)(h) &= (\tilde{\Delta}^{it}\lambda(g)\tilde{\Delta}^{-it}\xi)(h) \\
&= \chi(h)^{it}\Delta^{it}(\lambda(g)\tilde{\Delta}^{-it}\xi)(h) \\
&= \chi(h)^{it}\Delta^{it}(\tilde{\Delta}^{-it}\xi)(h-g) \\
&= \chi(h)^{it}\Delta^{it}\xi(h-g)^{-it}\Delta^{-it}\xi(h-g) \\
&= \chi(g)^{it}\xi(h-g) = \chi(g)^{it}(\lambda(g)\xi)(h),
\end{aligned}$$

одакле је

$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(\lambda(g)) = \chi(g)^{it}\lambda(g),$$

што је и требало доказати. ■

Погледајмо сада како дуално дејство $\widehat{\alpha}$ трансформише дуалну тежину $\widetilde{\varphi}$. Најпре, докажимо да је $\mu(p) := 1 \otimes \nu_p,\ p \in \widehat{G}$ $*-$аутоморфизам Томитине алгебре $C_c(\mathfrak{A}_0;G)$. Очигледно је да је $\mu(p)C_c(\mathfrak{A}_0;G) = C_c(\mathfrak{A}_0;G)$.

Тада за произвољне $\xi, \eta \in C_c(\mathfrak{A}_0; G)$ имамо да је

$$\begin{aligned}
[(\mu(p)\xi)(\mu(p)\eta)](g) &= \int_G [T(-h)(\mu(p)\xi)(g-h)](\mu(p)\eta)(h)dh \\
&= \int_G \overline{p(g-h)}[T(-h)\xi(g-h)](\overline{p(h)}\eta(h)dh \\
&= \int_G \overline{p(g)}[T(-h)\xi(g-h)](\overline{p(h)}\eta(h)dh \\
&= \overline{p(g)}(\xi\eta)(g) = [\mu(p)\xi\eta](g),
\end{aligned}$$

тј.

$$\begin{aligned}
[\mu(p)\xi]^{\#}(g) &= T(-g)(\mu(p)\xi)(-g)^{\#} \\
&= T(-g)(\overline{p(-g)}\xi(-g))^{\#} \\
&= \overline{p(g)}T(-g)(\xi(-g))^{\#} = [\mu(p)\xi^{\#}](g).
\end{aligned}$$

Тиме смо показали да је $\mu(p),\ p \in \widehat{G}$ $*-$аутоморфизам Томитине алгебре $C_c(\mathfrak{A}_0; G)$, који такође чува скаларни производ јер је унитаран. Одавде је,

$$\widehat{\alpha}_p \circ \pi_l(\xi) = \pi_l(\mu(p)\xi), \quad p \in \widehat{G}, \xi \in C_c(\mathfrak{A}_0; G).$$

Одатле, такође можемо закључити да важи:

Став 5.30. Дуално дејство $\widehat{\alpha}$ дуалне групе $\widehat{G}$ на укрштени производ $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ оставља дуалну тежину $\widetilde{\varphi}$ инваријантном.

Може се показати да је дуална тежина верна, нормална и полуконачна. Ипак, да би се то урадило, потребно је увести нове карактеризације наведених појмова, а само извођење је доста захтевно. Детаљи се могу пронаћи у (Tak03).

Закључак

Циљ овог мастер рада био је да се изложи теорија локално компактних Абелових група, али са посебним освртом на њене примене у операторским алгебрама, које представљају област интересовања аутора. Како су обе области изразито велике и саме за себе, остало је доста материјала који због ограничености није нашао своје место у раду. Најпре, у првом делу није показана анализа на локално компактним групама, пре свега чувена Питер-Вејлова теорема, као и репрезентације Лијевих група које се могу пронаћи у (Fol15).
Што се тиче другог дела, укрштени производ је у операторским алгебрама и дан данас једна од најактуелнијих тема. Наравно, ми смо овде показали малтене сам увод (за много детаљнији али и обимнији приказ погледати (Tak03)) и то само за фон Нојманове алгебре, док наравно исто може да се учини и у случају C^*-алгебри. Модерна симбиоза ових области су можда локално компактне квантне групе које су увели 2000. Stefan Vaes и Johan Kustermans у раду (VK00). Многи аспекти даљег истраживања могу се пронаћи у њиховим радовима, као и нпр. у радовима Ami Viselter-a, а посебан осврт на фон Нојманове алгебре може се пронаћи у радовима два врло значајна имена у овој области: Sorin Popa и Adrian Ioana.

Литература

[ADJ12] M. Arsenovic, M. Dostanic, and D. Jocic. *Теорија мере, функционална анализа, теорија оператора*. Завод за уџбенике, 2012.

[Con07] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2007.

[Dae74] A. Van Daele. A new approach to the tomita-takesaki theory of generalized hilbert algebras. *Journal of Functional Analysis*, 15(4):378–393, 1974.

[Dae78] A. Van Daele. *Continuous Crossed Products and Type III von Neumann Algebras*. Lecture Notes Series. London Mathematical Society, 1978.

[Dix11] J. Dixmier. *C*-Algebras*. North Holland, 2011.

[Fol99] G. B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications, 2nd edition*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley and Sons Ltd, 1999.

[Fol15] G. B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic analysis*. Textbooks in Mathematics. Chapman and Hall/CRC, 2015.

[Haa33] A. Haar. Der massbegriff in der theorie der kontinuierlichen gruppen. *Annals of Mathematics*, 34(1):147–169, 1933.

[HR63] E. Hewitt and K. A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis, vol. I*. Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[Izz92] A. J. Izzo. A functional analysis proof of the existence of haar measure on locally compact abelian groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 115(2):581–583, 1992.

[Jon15] V. F.R. Jones. Von neumann algebras. `https://math.vanderbilt.edu/jonesvf/VONNEUMANNALGEBRAS2015/VonNeumann2015.pdf`, 2015.

[Kec18] D.J. Keckic. Одабрана поглавља функционалне анализе, радна верзија. `http://poincare.matf.bg.ac.rs/~keckic//Funkcionalna.pdf`, 2018.

[KR97a] R.V. Kadison and J.R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. 2: Advanced Theory*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1997.

[KR97b] R.V. Kadison and J.R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume I: Elementary Theory.* Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1997.

[Loo53] L. H. Loomis. *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis.* Van Nostrand, New York, 1953.

[Mur90] G. J. Murphy. *C*-Algebras and Operator Theory.* Academic Press, 1990.

[Rud62] W. Rudin. *Fourier Analysis on Groups.* Wiley-Interscience, New York, 1962.

[Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Science, 1991.

[Tak70] M. Takesaki. *Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications.* Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1970.

[Tak73] M. Takesaki. Duality for crossed products and the structure of von neumann algebras of type iii. *Acta Mathematica*, 131:249–310, 1973.

[Tak03] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras II.* Encyclopedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

[VK00] S. Vaes and J. Kustermans. Locally compact quantum groups. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 33(6):837–934, 2000.