Математички факултет, Универзитет у Београду

Први колоквијум из Анализе 2 (Р и Л смер)

31.1.2020.

1. Нека је $X = C[0,1]$ и нека је дато пресликавање $d\colon X \times X \to \mathrm{R}$,
$$d(f,g) = \begin{cases} \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| + \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |\alpha g(x)|, & f \neq g \\ 0, & f = g. \end{cases}$$
   а) [2] Наћи позитивну константу α за које је d метрика на X.
   б) [3] Нека су дате функције $f_0(x) = 0$ и $f_1(x) = |6x-4| - 3$. Описати отворене кугле $B(f_0,1)$, $B(f_1,1)$ и $B(f_1,4)$.
   в) [2] Наћи $d(B(f_0,1), B(f_1,1))$ и $\operatorname{diam}(B(f_1,4))$.
   г) [5] Нека су дати скупови
$$A = \{f \in X\colon\ \sin(f(x)-x) = 1 \,\text{за свако}\, x \in [0,1]\} \quad \text{и}$$
$$B = \{f \in X\colon \text{постоји}\, g \in X \,\text{тако да за свако}\, x \in [0,1] \,\text{важи}\, 2f(x) = \operatorname{arctg}(g(x))\}$$
   Испитати отвореност, затвореност и повезаност скупа $A \cup B$.

2. Нека је дата непрекидна функција
$$f(x,y) = \begin{cases} (x-1)y\ln\left((x-1)^2+y^2\right), & (x,y) \neq (1,0) \\ a, & (x,y) = (1,0), \end{cases}$$
   где је a реалан број.
   а) [3] Испитати диференцијабилност функције f.
   б) [2] Испитати равномерну непрекидност функције f на $\mathbb{R}^2$.
   в) [4] Одредити локалне екстремуме функције f.
   г) [2] Наћи $f(D)$, где је $D = \left\{(x,y)\colon \frac{1}{2} \leqslant (x-1)^2+y^2 \leqslant 2\right\}$.

3. [7] Наћи запремину тела које је ограничено површима $z=0,\ y=0,\ y=x\sqrt{3},\ x\sqrt{2}=1,\ x^2+y^2+z=1$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

Математички факултет, Универзитет у Београду

Први колоквијум из Анализе 2 (Р и Л смер)

31.1.2020.

1. Нека је $X = C[0,1]$ и нека је дато пресликавање $d\colon X \times X \to \mathrm{R}$,
$$d(f,g) = \begin{cases} \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| + \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |\alpha g(x)|, & f \neq g \\ 0, & f = g. \end{cases}$$
   а) [2] Наћи позитивну константу α за које је d метрика на X.
   б) [3] Нека су дате функције $f_0(x) = 0$ и $f_1(x) = |6x-4| - 3$. Описати отворене кугле $B(f_0,1)$, $B(f_1,1)$ и $B(f_1,4)$.
   в) [2] Наћи $d(B(f_0,1), B(f_1,1))$ и $\operatorname{diam}(B(f_1,4))$.
   г) [5] Нека су дати скупови
$$A = \{f \in X\colon\ \sin(f(x)-x) = 1 \,\text{за свако}\, x \in [0,1]\} \quad \text{и}$$
$$B = \{f \in X\colon \text{постоји}\, g \in X \,\text{тако да за свако}\, x \in [0,1] \,\text{важи}\, 2f(x) = \operatorname{arctg}(g(x))\}$$
   Испитати отвореност, затвореност и повезаност скупа $A \cup B$.

2. Нека је дата непрекидна функција
$$f(x,y) = \begin{cases} (x-1)y\ln\left((x-1)^2+y^2\right), & (x,y) \neq (1,0) \\ a, & (x,y) = (1,0) \end{cases},$$
   где је a реалан број.
   а) [3] Испитати диференцијабилност функције f.
   б) [2] Испитати равномерну непрекидност функције f на $\mathbb{R}^2$.
   в) [4] Одредити локалне екстремуме функције f.
   г) [2] Наћи $f(D)$, где је $D = \left\{(x,y)\colon \frac{1}{2} \leqslant (x-1)^2+y^2 \leqslant 2\right\}$.

3. [7] Наћи запремину тела које је ограничено површима $z=0,\ y=0,\ y=x\sqrt{3},\ x\sqrt{2}=1,\ x^2+y^2+z=1$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.