

1. Нека су дати скупови

$$S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^T, \det(A) = 2020\},$$

$$T = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A + A^T = 0, -2019 < \det(A) \leq 2020\},$$

на којима је задата стандардна еуклидска метрика d наслеђена из $\mathbb{R}^4 \cong M_2(\mathbb{R})$, односно d је дефинисана са

$$d : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(A, B) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 (a_{ij} - b_{ij})^2}.$$

- а) [6] Наћи дијаметре простора (S, d) и (T, d) .
- б) [4] Наћи растојање простора S и T .
- в) [5] Испитати компактност простора (S, d) и (T, d) .

2. Нека је $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција таква да је $\varphi(x) > 0$ за $x \in (1, 2)$ и $\varphi(x) = 0$ за $x \notin (1, 2)$. Дефинишимо $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ са $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \varphi\left(\frac{y}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

- а) [6] Показати да је f непрекидна на \mathbb{R}^2 .
- б) [3] Испитати да ли функција f има извод у правцу сваког јединичног вектора у тачки $(0, 0)$ и у потврдном случају их одредити.
- в) [6] Одредити за које $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ функција f је диференцијабилна.

3. [15] Израчунати криволинијски интеграл $\int_{\gamma} \frac{x^2}{z\sqrt{2z^2 + x^2y^2}} dl$, где је γ део криве у првом октанту која се добија пресеком површи $x^2 + y^2 = z^2$ и $y = e^z x$ од тачке $A\left(\frac{\ln 2}{\sqrt{5}}, \frac{2\ln 2}{\sqrt{5}}, \ln 2\right)$ до тачке $B\left(\frac{1}{\sqrt{e^2+1}}, \frac{e}{\sqrt{e^2+1}}, 1\right)$.

4. Дата је функција

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{1 + n^2 x^2}.$$

- а) [4] Доказати да функција f равномерно конвергира на скупу $\mathbb{R} \setminus (-a, a)$ за свако $a > 0$.
- б) [3] Доказати да за $x \in (0, \pi]$ важи

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin x}{1 + k^2 x^2} \geq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\sin x}{1 + t^2 x^2} dt.$$

- в) [5] Испитати да ли функција f равномерно конвергира на $[-\pi, \pi]$.
- г) [3] Одредити скуп тачака непрекидности функције f .

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.