Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 2 (Р и Л смер) - испитни рок Јун 2
4.7.2020.

1. Нека је $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ пресликавање дато са

$$d((x,y),(x',y')) = \begin{cases} |y-y'|, & x = x' \\ |y| + |y'| + |x-x'|, & x \neq x' \end{cases}.$$

   а) [3] Доказати да је $d$ једна метрика на $\mathbb{R}^2$.

   б) [3] Одредити (и скицирати) скупове $B((0,2);1)$, $B((0,0);1)$ и $B((0,1);2)$.

   в) [2] Нека је $d_1\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ метрика на $\mathbb{R}^2$ дата са

$$d_1((x,y),(x',y')) = |x-x'| + |y-y'|.$$

   Доказати да за свако $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ важи $d((x,y),(x',y')) \geq d_1((x,y),(x',y'))$.

   г) [3] Доказати да је сваки низ $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ у $\mathbb{R}^2$ који је Кошијев у односу на метрику $d$ такође Кошијев и у односу на метрику $d_1$.

   д) [3] Нека је $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ низ у $\mathbb{R}^2$ који је Кошијев у односу на метрику $d$, и нека је $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ у метричком простору $(\mathbb{R}^2, d_1)$. Доказати да $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x,y)$ и у метричком простору $(\mathbb{R}^2, d)$.

   ђ) [2] Доказати да је метрички простор $(\mathbb{R}^2, d)$ комплетан.

2. Нека је $T$ тело ограничено површима $z = x^2+y^2-1$, $x^2+y^2 = 1$ и $z = 2020$. Нека је $K$ скуп дефинисан са $K = \{p(x) = ax^2+bx+c \mid (a,b,c) \in T\}$, при чему $(0,0,0) \in T$.

   а) [3] Доказати да се достиже максимум и минимум вредности дискриминанти квадратних једначина $p(x) = 0$, где је $p$ из скупа $K$.

   б) [10] Одредити тај максимум и минимум.

3. [15] Нека су дате у простору тачке $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(-1,2,1)$, $D(-1,0,2)$ и $E(1,2,-1)$. Израчунати криволинијски интеграл

$$\int\limits_{\gamma} (e^{x^2} + xz)\,dx + (z+x)\,dy + xz\,dz,$$

   где је крива $\gamma$ изломљена линија $ABCDBE$, при чему се оријентација сваке дужи узима од почетне до крајње тачке.

4. а) [8] Развити функцију $f(x) = \ln\Big(\dfrac{\sin x}{\pi}\Big)$, $x \in (0,\pi)$ у $\pi$ периодичан Фуријеов ред и одредити ка чему он конвергира тачка по тачка на $\mathbb{R}$.

   б) [4] Показати да је $\displaystyle\int\limits_0^1 \big(\ln\Gamma(x) + \ln\Gamma(1-x)\big)\ln\Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \ln^2\Big(\frac{\pi}{\sin \pi x}\Big)\,dx.$

   в) [4] Израчунати интеграл из примера под б).

**Напомена:** У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.