Математички факултет, Универзитет у Београду
Други колоквијум из Анализе 2 (Р и Л смер)
10.6.2020.

1. Нека су дате површи $S_1 : 2y - 1 = 2(x^2 + z^2)$, $S_2 : 4 - y = x^2 + z^2$ и $S_3 : x^2 + z^2 = 1$.

   а) [5] Израчунати површински интеграл

   $$I = \iint\limits_S xdydz + (2y + \sin(\sin(x^2 + z^2)))dzdx + zdxdy$$

   по спољној страни затворене површи $S$ коју чине делови површи $S_1$ и $S_2$ који се налазе унутар површи $S_3$, као и дела површи $S_3$ који се налази између површи $S_1$ и $S_2$.

   б) [5] Израчунати површински интеграл

   $$I = \iint\limits_S xdydz + (2y + \sin(\sin(x^2 + z^2)))dzdx + zdxdy$$

   по површи $S$ коју чине делови површи $S_1$ и $S_2$ који се налазе унутар површи $S_3$ са истом оријентацијом као у делу задатка под а).

2. а) [2] Доказати једнакост

   $$\frac{\partial}{\partial a} \int_0^{+\infty} \frac{b\sin(ax) - a\sin(bx)}{x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{b\sin(ax) - a\sin(bx)}{x^2} \right) dx,$$

   за све $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$.

   б) [5] Израчунати вредност интеграла

   $$\int_0^{+\infty} \frac{b\sin(ax) - a\sin(bx)}{x^2}\, dx$$

   у зависности од реалних параметара $a$ и $b$.

   в) [1] Израчунати интеграл

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\, dx.$$

3. Нека је дата фамилија функција

   $$f_t(x) = \begin{cases} t - t^2 x, & x \in \left[0, \frac{1}{t}\right] \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{t}, \pi\right] \end{cases}, \quad t \in \left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right).$$

   а) [2] Испитати равномерну конвергенцију фамилије функција $(f_t)$ на $(0, \pi)$ када $t \to +\infty$.

   б) [2] Испитати равномерну конвергенцију фамилије функција $(f_t)$ на $(0, \pi)$ када $t \to \frac{1}{\pi}+$.

   в) [2] Наћи косинусни Фуријеов ред функције $f_t$ на $[0, \pi]$.

   г) [2] Наћи суму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\frac{n}{2}}{n^2}$.

   д) [2] Одредити суму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \cos\frac{n}{t}\right)^2}{n^4}$ у зависности од $t \in \left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$.

   ђ) [2] Доказати $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2} = \frac{1}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

**Напомена:** У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.